INSPCETION D'ACADEMIE
DE PIKINE GUEDIAWAYE

CAISSE DE DEPÔT ET DE
CONSIGNATION

CENTRE REGIONAL DE FORMATION DES PERSONNELS DE L'EDUCATION

FASCICULE DE MATHEMATIQUES

PREMIERES S2&S4

Auteurs

Mouhamadou DJIGO : Professeur au Lycée Seydina Issa Rohou Lahi

Babacar DIOP : Professeur au Lycée Seydina Limamou Laye

Cheikh Tidiane DIOP : Professeur au Lycée de Pikine

El Hadji Demba Wade DIOP : Professeur au Lycée Banque Islamique

Youssoupha DIACK : Professeur au Lycée de Mbao

Younouss BOYE : Professeur au Lycée Pikine Est

Momar Talla GUISSE : Professeur au Lycée Mame Yelli Badiane

Matar DIAGNE: Professeur au Lycée de Thiaroye

Diène NGOM : Proviseur du Lycée Keur Massar

Ndane SARR: Proviseur du Lycée Seydina Issa Rohou Lahi

Superviseurs

Niowy FALL : Inspecteur de l'Enseignement Moyen Secondaire à l'IA de Dakar

Hameth Saloum FALL: Formateur au CRFPE de Dakar

Révision et Validation

Collège mathématiques de l'IGEF

Table des matières

INTRODUCTION

Ce fascicule couvre tout le programme de mathématiques de Premières S2&S4.

Dans chaque thème, les exercices sont répartis en trois rubriques :

- « **Exercices de restitution des connaissances** » : ce sont des exercices qui permettent à l'élève de contrôler les savoirs déclaratifs (définitions, théorèmes, propriétés, règles …), préalables à toute activité mathématique.
- « **Exercices d'application** » : ce sont des exercices qui permettent d'appliquer les savoirs déclaratifs, de développer des savoir-faire, de faire acquérir des savoirs procéduraux.
- « **Exercices de synthèse** » : ce sont des exercices qui font appel à plusieurs ressources dont celles du thème.

Thème 1 : EQUATIONS – INEQUATIONS – SYSTEMES

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Recopier et compléter chacun des énoncés ci-dessous pour que les propositions obtenues soient vraies.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a} = b$ si et seulement si… .
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a} \leq b$ si et seulement si … .
3. Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a} \geq b$ si et seulement si … .
4. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, $|a| \geq b$ si et seulement si : $-b$ …. ou … .
5. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, $|a| \leq b$ si et seulement si : $-b$ … .

Exercices d'application

Exercice 2

Dans chacun des cas ci-dessous , préciser si le triplet (a, b, c) est solution du système (S) (Justifier la réponse) :

1. a = 1 , b = 1 et c = 1 ; (S) : $\begin{cases} -x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \\ 2x + 2y + 4z = 8 \end{cases}$;

2. a = 1 , b = 1 et c = 1 ; (S) : $\begin{cases} 6x + 2y + 2z = 10 \\ 10x + y + z = 4 \\ 2x + 2y + 4z = 8 \end{cases}$;

3. a = 1 , b = 1 et c = 1 ; (S) : $\begin{cases} 6x + 2y + 2z = 10 \\ 2x + y + z = 4 \\ 2x + 2y + 4z = 8 \end{cases}$.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\sqrt{(2 - x)^2} = x$; **2**. $\sqrt{12 - 4x} = 2x - 2$; **3**. $\sqrt{x + 1} = \sqrt{-2 - x}$.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\sqrt{x^2+5} = x$; **2**. $\sqrt{x^2+5x+3} = 2x+1$; **3**. $\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}} = x+\frac{1}{2}$.

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x}$;

2. $\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2-x-1}$;

3. $\sqrt{x^2+4x-21} - \sqrt{-x^2+5x-6} = 0$;

4 . $\sqrt{4x^2+4x+6} = \sqrt{x^2-5x+6}$.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\sqrt{(x+10)^2} \leq 0$;

2. $\sqrt{7-x} < 3$;

3. $x+3 > \sqrt{x+1}$;

4. $\sqrt{2-x} > x+4$.

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\sqrt{2x-1} > \sqrt{x-4}$;

2. $\sqrt{x^2+2x-3} \leq 2x+1$;

3. $\sqrt{-x^2+3x-2} \geq x-1$;

4. $\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x^2} \leq 0$.

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, les systèmes ci-dessous en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

1. $\begin{cases} x-2y+z=-5 \\ -x+y+2z=-4 \\ 2x-y-z=5 \end{cases}$; **2**. $\begin{cases} 2x-y+3z=5 \\ x+2y-z=-1 \\ -x-7y+6z=2 \end{cases}$; **3**. $\begin{cases} x-3y-2z=-5 \\ 2x-y+z=3 \\ x+7y+8z=21 \end{cases}$.

Exercice 9

Résoudre graphiquement chacun des systèmes d'inéquations ci-dessous :

1. $\begin{cases} x + 2y \geq 0 \\ 2x - y + 1 \leq 0 \\ 3x + 2y - 2 \leq 0 \end{cases}$; **2.** $\begin{cases} 2x + 3y + 3 < 0 \\ -x + y + 8 > 0 \\ 2x - 3y - 12 < 0 \end{cases}$; **3.** $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 3 \\ -x + y + 4 \geq 0 \end{cases}$.

Exercices de synthèse

Exercice 10

Dans chacun des cas ci-dessous étudier le signe f (x) suivant les valeurs de x :

1. $f(x) = \sqrt{2x - 1} - x$; **2**. $f(x) = \sqrt{x + 3} - x - 2$; **3**. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3} + x + 1$.

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\sqrt{-4x^2 + x + 5} = |2x + 2|$;

2. $|3x-1| < \sqrt{5x - 4}$;

3. $\sqrt{x^2 + 6x + 6} \geq |2x + 2|$.

Exercice 12

Déterminer une fonction polynôme P de degré 2 telle que $P(-1) = 11$, $P(1) = -3$ et $P(2) = 5$.

Exercice 13

Bineta est élève en 1^eS_2 au lycée de Pikine. Elle étudie son temps de travail personnel en mathématiques et en français. Pour ces deux matières, elle ne dispose que de 16h de travail personnel par semaine. Son professeur de français lui conseille de travailler au moins 3 h sa discipline et celui de mathématiques au moins 5h.

Comme Bineta aime le français, elle décide de consacrer au moins 3 h de plus en français qu'aux mathématiques afin de lire un livre par semaine.

En utilisant les outils mathématiques vus au programme, propose à Bineta trois options possibles.

Exercice 14

Une société de transport par bateaux veut transporter 650 personnes, 120 véhicules et 160 tonnes de matériels. Elle dispose de 10 bateaux de type A et 11 bateaux de type B.

Un bateau de type A peut transporter en pleine charge 30 personnes, 10 véhicules et 10 tonnes de matériels.

Un bateau de type B peut transporter en pleine charge 50 personnes, 6 véhicules et 10 tonnes de matériels.

1. Déterminer le nombre minimal de bateaux à utiliser pour tout transporter.
2. Préciser le nombre de bateaux de chaque type.

Exercice 15

Un éleveur veut nourrir ses moutons au moindre coût en leur apportant un minimum journalier de 120 kg de protides, 90 kg de lipides et 60 kg de glucides. Il utilise deux types d'aliments A et B vendus sur le marché. Un sac de l'aliment A contient 3kg de protides, 3 kg de lipides et 1 kg de glucides et celui de l'aliment B contient 2kg de protides, 1 kg de lipides et 2 kg de glucides.

Un sac de l'aliment A coûte 1000 f CFA et un sac de l'aliment B, 500 f CFA.

Combien de sacs de chaque type d'aliments doit-il acheter chaque jour ?

Combien cela lui coûtera-t-il ?

Thème 2 : APPLICATIONS

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Recopier et compléter les énoncés ci-dessous pour que les propositions obtenues soient vraies.

Soit f une application de A vers B.

1. L'application f est…si tout élément de B a au plus un antécédent par f dans A.
2. L'application f est…si tout élément de B a au moins un antécédent par f dans A.
3. L'application f est…si tout élément de B a un unique antécédent par f dans A.
4. L'application f est bijective si et seulement si f est … et … .
5. Si f(x) = y alors x est … de y par f et y est … de x par f.

Exercice 2

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. On appelle…de f à I, la fonction $g : I \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x)\,.$$

2. La fonction f est alors un …de g à $\mathbb{R}$.

Exercices d'application

Exercice 3

Soit f une fonction dont la courbe est représentée ci-contre.

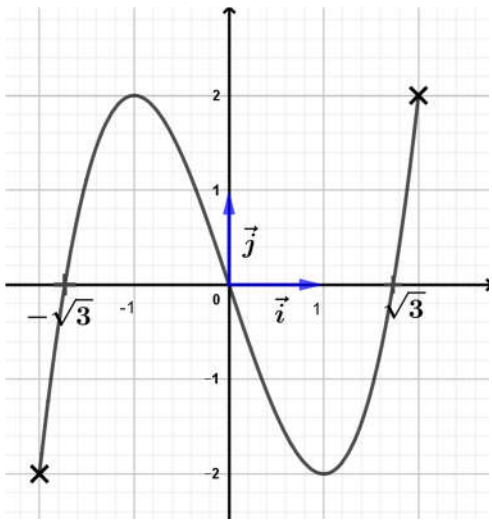
1. Déterminer graphiquement l'image directe par f de chacun des ensembles ci-dessous :

a. $[-2\,;-1]$; **b.** $[-2\,;0[$; **c.** $]-2\,;-1]$; **d.** $]-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\,[$;

e. $[-2\,;2]$; **f.** $\{-\sqrt{3}\,;0\,;\sqrt{3}\,;1\}$.

2. Déterminer graphiquement l'image réciproque par f de chacun des ensembles ci-dessous :

a. [-2 ; 0] ; **b.**]-2 ; 0[; **c.** [0 ; 2] ; **d.**] 0 ; 2] ; **e.**]0 ; 2[; **f.** [–2; 2] ; **g.** {0}.



Exercice 4

Soit l'application $f :]\,0\,;1] \to [-2\,;1[$.

$$x \longmapsto \frac{x}{x+1}$$

Démontrer que f est une application injective.

Exercice 5

Soit l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$.
$$x \longmapsto x^2$$

Démontrer que g est une application surjective.

Exercice 6

Soit l'application $h : [-2\ ;\ 5] \to]-5\ ;\ 9\ ]$.
$$x \longmapsto -2x+5$$

1. Démontrer que h est une application bijective.
2. Déterminer l'application réciproque h^{-1}.

Exercice 7

On donne l'application $k : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
$$x \longmapsto \frac{2x-3}{x-1}$$

1. Démontrer que k est une bijection.
2. Déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 8

Soient les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$$x \longmapsto x-\sqrt{x} \qquad\qquad x \longmapsto \frac{x^2-x}{x+\sqrt{x}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et celui de g.
2. Démontrer que g est la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 9

Soit $g :]-1\ ;\ 1[\to \mathbb{R}$ et $f : [-1\ ;\ +6[\to \mathbb{R}$.
$$x \longmapsto \frac{x+1}{\sqrt{x+1}} \qquad\qquad x \longmapsto \sqrt{x+1}$$

Démontrer que f est un prolongement de g à l'intervalle [-1 ; +6 [.

Exercice 10

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$$x \longmapsto \sqrt{x - E(x)}$$

Soit g la restriction de f à l'intervalle [-1 ; 2]. Déterminer g(x) sans la notation E(x).

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$$x \longmapsto \frac{2x^3-2x^2-2x+2}{x^2-1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
2. Simplifier f(x) sur D_f.
3. Déterminer un prolongement de f à $\mathbb{R}$.

Exercices de synthèse

Exercice 12

Dans chacun des cas ci-dessous, dire si l'application f est injective, surjective ou bijective :

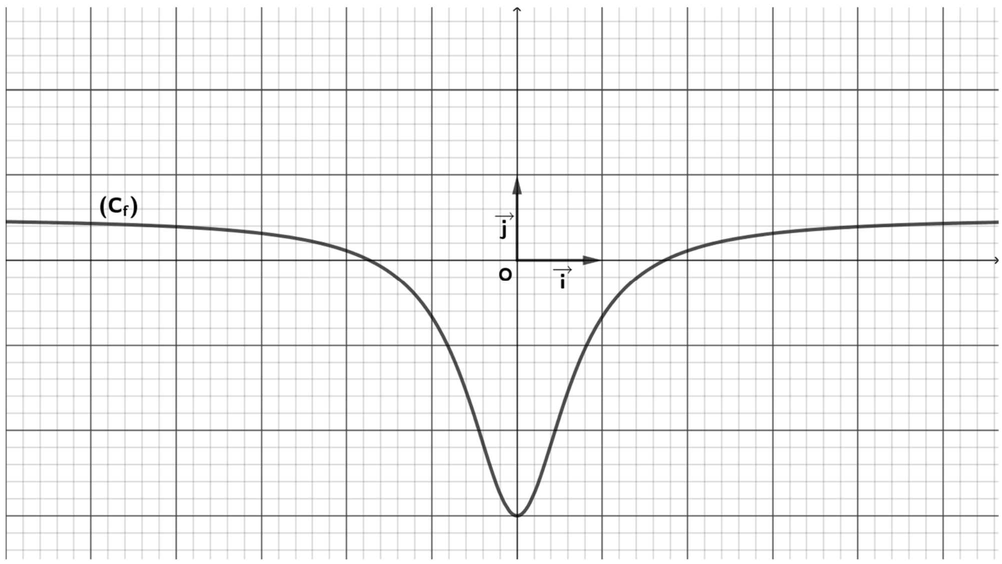
1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2 + 1$
2. $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$
3. $f : \mathbb{R} \to [-3 ; +\infty[$, $x \longmapsto 2x^2 - 3$
4. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto (2x+y ; x-y)$
5. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \longmapsto 2n$

Exercice 13

1. Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, l'équation d'inconnue x dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{x^2-3}{2x^2+1} = m.$$

2. On donne la courbe (C_f) de la fonction numérique f à variable réelle définie par : $x \mapsto \frac{x^2-3}{2x^2+1}$ dans un repère orthonormal ($(O ; \vec{i}, \vec{j})$).



En utilisant la question 1. et la courbe déterminer l'intervalle F d'amplitude maximal et un intervalle E telles que l'application $f : E \to F$ soit bijective.

$$x \longmapsto \frac{x^2-3}{2x^2+1}$$

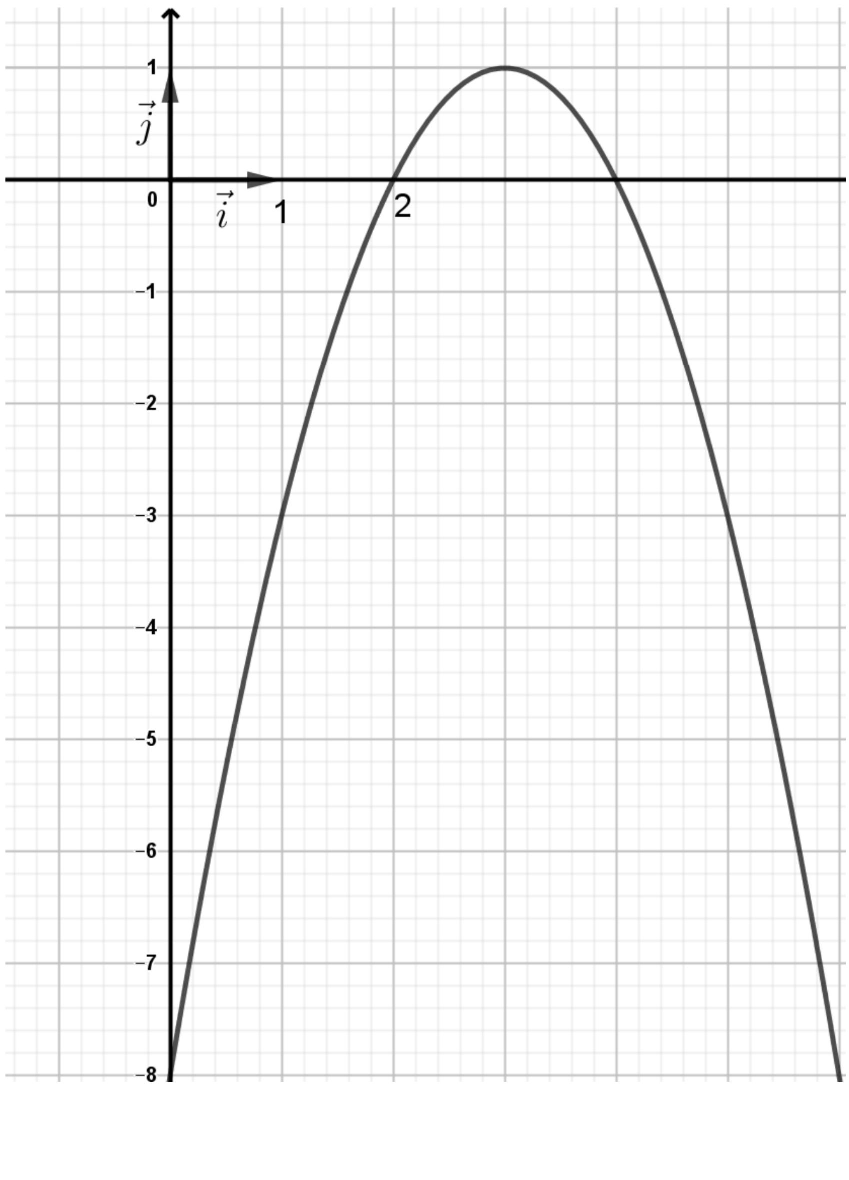
3. Déterminer alors l'application réciproque f^{-1} de f.

Exercice 14

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). La représentation graphique ci-dessous est celle d'une fonction f d'ensemble de définition $[0; 6]$.

1. Déterminer graphiquement : $f([1; 2])$, $f([0; 6])$, $f([2; 4)]$, $f^{-1}\left(\left[-2; \frac{2}{3}\right]\right)$, $f^{-1}\left(\left[-\frac{16}{3}; \frac{2}{3}\right]\right)$ et $f^{-1}([-2,0])$.

2. Tracer dans le même repère la droite d'équation : $y = \frac{2}{3}(x-4)$ et résoudre graphiquement les inéquations : $f(x) > \frac{2}{3}(x-4)$ et $f(x) \leq \frac{2}{3}(x-4)$.



Thème 3 : OUTIL VECTORIEL ET ANALYTIQUE

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Soient (A , a) , (B , b) , (C , c) , (D , d) sont des points pondérés.

Recopier puis compléter les énoncés ci – dessous pour que les propositions obtenues soient vraie.

1. Si $a + b + c + d \neq 0$, on appelle barycentre du système
   $\{ (A , a) , (B , b) , (C , c) , (D , d) \}$, l'unique point G tel que … .
2. Si tous les coefficients sont égaux et non nuls alors G est… du système.

Exercice 2

Recopier puis compléter les énoncés ci - dessous pour que les propositions obtenues soient vraies.

1. Pour tout réel k non nul , le barycentre du système $\{ (A_i , \alpha_i) \}_{1 \leq i \leq 4}$ est … que celui … .
   du système $\{ (A_i , \dots) \}_{1 \leq i \leq 4}$.
2. On ne modifie pas … du système $\{ (A_i , \alpha_i) \}_{1 \leq i \leq 4}$ en … plusieurs points par … affecté de la somme (non nulle) des coefficients de ces points.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

$A_1 (a_1 , a_2)$, $A_2 (b_1 , b_2)$, $A_3 (c_1 , c_2)$ et $A_4(d_1 , d_2)$.

Recopier puis compléter l'énoncé ci – dessous pour avoir une proposition vraie.

Si $G (\alpha ; \beta)$ est le barycentre du système $\{ (A_i , \alpha_i) \}_{1 \leq i \leq 4}$ alors : $\begin{cases} \alpha = \dots \\ \beta = \dots \end{cases}$.

Exercices d'application

Exercice 4

ABCD est un parallélogramme de centre O.

Montrer que O est barycentre des points pondérés (A, 1) , (B, 1) , (C, 1) et (D, 1).

Exercice 5

Construire un parallélogramme ABCD puis le barycentre G des points pondérés (A ; 1) , (B ; 1) , (C ; 3) et (D ; 3) .

Exercice 6

1. Placer deux points distincts A et B dans le plan puis le barycentre G des points (A ; 1) et (B ; 2).
   Justifier que A, B et G sont alignés.
2. Placer quatre points distincts A , B , C et D dans le plan. Construire le point G barycentre des points pondérés (A ; 1) , (B ; −1) , (C ; 1) et (D ; 2).

Exercices de synthèse

Exercice 7

Soit G le barycentre des points pondérés (A ; 1), (B ; -1), (C ; 2) et (D ; 3).

1. Préciser la relation vectorielle qui définit G.
2. Soit J le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (C ; 2) et K le barycentre des points pondérés (B ; -1) et (D ; 3).

Montrer que $3\overrightarrow{GD} + 2\overrightarrow{GK} = \vec{0}$ puis construire les points J, K et G.

3. a. Construire le barycentre L des points pondérés (A; 1), (B; -1) et (C; 2).

   b. Montrer que $2\overrightarrow{GL} + 3\overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

   c. En déduire une nouvelle construction de G.

Exercice 8

Soit ABC un triangle rectangle en A.

1. Construire le point G, barycentre des points pondérés (A; 1), (B; -1) et (C; 7).
2. Construire le point G_0, barycentre des points pondérés (A; 1), (B; 3) et (C; 3).
3. Démontrer que (GG_0) est parallèle à (BC).

Exercice 9

Soit un triangle ABC, E le milieu de [AB] et G le barycentre des points pondérés (A ; 2), (B ; 2) et (C ; 15).

Démontrer que G, C et E sont alignés.

Exercice 10

Soit ABCD un quadrilatère. On note G l'isobarycentre des points A, B, C et D.

Le but de cet exercice est de préciser la position de G.

1. On note I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD].

   Montrer que G est le barycentre de I et J munis de coefficients que l'on précisera.
2. Conclure et faire une figure.

Exercice 11

Construire un carré ABCD puis le point K, barycentre des points pondérés (A ; 2), (B ; 1), (C ; 2) et (D ; 1).

On note I le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (B ; 1), et J celui des points pondérés (C ; 2) et (D ; 1).

1. Placer I et J en justifiant.
2. Réduire l'écriture des vecteurs suivants : $2\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB}$ et $2\overrightarrow{KC} - \overrightarrow{KD}$.

   En déduire que K est le barycentre des points pondérés (I ; 1) et (J ; 3).
3. Placer K en justifiant.

Exercice 12

1. a. Construire un quadrilatère ABCD. On note M le point tel que : $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

   b. Montrer que le point M est barycentre des points B et C affectés de coefficients à déterminer.

2. Soit G le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (D ; −3).

   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AD}$. Construire G.

3. Construire le point le barycentre des points pondérés (A ; 2), (B ; 1), (C ; 2) et (D ; −6).

Exercice 13

Soit A , B , C et D sont quatre points du plan tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés.

Soit G le barycentre des points pondérés (A ; 1) , (B ; 2) , (C ; 2) et (D ; 1) ; I le milieu de [A D] et J le milieu de [BC] .

Montrer que les points G , I et J sont alignés.

Exercice 14

1. Construire un quadrilatère ABCD puis le point G, le centre de gravité du triangle ABC ainsi que les points I et J , milieux respectifs des segments [AB] et [BC] .

2. Le point L est le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (D ; 3) .

   Le point K est le barycentre des points pondérés (C ; 1) et (D ; 3) .

   Le point H est le barycentre des points pondérés (A ; 1) , (B ; 1) , (C ; 1) et (D ; 3) .

   a. Construire les points L et K.

   b. Démontrer que H est le barycentre des points G et D affectés de coefficients que l'on précisera.

   c. Démontrer que H est le barycentre des points J et L affectés de coefficients que l'on précisera.

   d. Démontrer que H est le barycentre des points I et K affectés de coefficients que l'on précisera.

Exercice 15

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$). Soient les points A (-3.4), B ($-\frac{7}{2}$; 0) et C(5 ; 2).

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

2. Soit k un réel différent de 0 et 1. Montrer que le système :

   $\{(A\,;\,k)\,,\,(B\,;\,1-k)\,,\,(C\,;\,-k^2)\,,\,(D\,;\,k^2)\}$ admet un barycentre G.

3. Exprimer les coordonnées de G en fonction de k.

Exercice 16

On considère un carré ABCD.

1. Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \|$ = AB.

2. Représenter (E) .

Exercice 17

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 4 cm.

Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{MB} + 3\,\overrightarrow{MC} \|$.

Exercice 18

Soit ABCD un carré de côté a.

Pour chacun des cas ci-dessous, déterminer l'ensemble des points M du plant vérifiant la relation donnée :

1.$\| \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM} \| = \| 3\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{DM} \|$;

2. $\| \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM} \| = \| \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{DM} \|$.

Thème 4 : PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Recopie et complète la propriété ci-dessous par ce qui convient.

Soient A et B deux points distincts du plan et k un nombre réel. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ est ... perpendiculaire à … en H tel que … .

Exercices d'application

Exercice 2

L'unité de longueur est le centimètre.

Soit A et B deux points tels que AB = 2.

Soit (E_k) l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AM} = k$.

Déterminer puis construire (E_k) pour chacune des valeurs suivantes de k : -6, - 4, - 2, 0 ,2 et 4.

Exercice 3

L'unité de longueur est le centimètre.

Soit un segment [AB] tel que AB = 6 et I le milieu du segment [AB].

1. Démontrer que pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IH}$ où le point H est le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).
2. Déterminer puis construire sur la même figure les ensembles E_1 , E_2 et E_3 des points M du plan vérifiant respectivement : $MA^2 - MB^2 = -36$; $MA^2 - MB^2 = 0$ et $MA^2 - MB^2 = 60$.

Exercice 4

L'unité de longueur est le centimètre.

On considère un segment [AB] tel que AB = 8 et I le milieu de [AB]. Déterminer et tracer l'ensemble des points M du plan vérifiant :

a. $MA^2 + MB^2 = 82$; **b.** $MA^2 + MB^2 = 32$; **c.** $MA^2 + MB^2 = 30$.

Exercice 5

On donne le segment [BC] tel que BC = 12.

1. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan vérifiant : $3MB^2 + 2MC^2 = 60$.
2. Déterminer puis construire l'ensemble (Γ') des points M du plan vérifiant : $2MB^2 - MC^2 = 0$.

Exercice 6

L'unité de longueur est le centimètre.

Soit deux points A et B du plan tels que AB = 8. On note I le milieu du segment [AB].

1. Démontrer que pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.

2. Déterminer et construire sur le même graphique la ligne de niveau k de l'application $M \mapsto \overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB}$ pour les valeurs de k suivantes : -16 ; 9 et 16.

Exercice 7

L'unité de longueur est le centimètre.

Dans chacun des cas ci-dessous , déterminer puis construire l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant :

1. AB = 2 et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -1$;
2. AB = 2 et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$;
3. AB = 5 et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 25$.

Exercice 8

L'unité de longueur est le centimètre.

Dans chacun des cas ci-dessous , déterminer puis construire l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant la relation donnée :

1. AB = 6 et $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 24$;
2. AB = 4 et $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 2$;
3. AB = 3 et $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 0$;
4. AB = 5 et $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 10$.

Exercice 9

L'unité de longueur est le centimètre.

Dans chacun des cas ci-dessous , déterminer puis construire l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant :

1. AB = 4 et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -1$;
2. AB = 3 et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$;
3. AB = 5 et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 25$.

Exercices de synthèse

Exercice 10

Soit un triangle ABC, I le milieu de [AB] et G le centre de gravité de ABC.

1. Montrer que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{IC}$.
2. Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tels que
   $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{MA} = 0$.
3. Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tels que
   $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{MA} = 0$.

Exercice 11

On considère un triangle ABC.

1. Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tels que
   $\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$.
2. Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tels que
   $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$.

Exercice 12

On donne dans le plan (P) un triangle ABC tel que BC = 8 , AB = 6 et $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{3}$ (rad).

Soit f l'application du plan (P) dans R définie par : $f(M) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$.

On désigne par (ζ_a) l'ensemble des points M du plan tel que f(M) = a où a est un réel.

1. Déterminer (ζ_0) .
2. Calculer f(B) et f(C).
3. Déterminer le réel a tel que (ζ_a) soit la médiatrice de [BC].

Exercice 13

On considère, dans le plan (P), un triangle AOB rectangle en O. Soit M un point quelconque de (P).

1. Montrer que : $MA^2 + MB^2 - 2MO^2 = AB^2 + 4\,\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OI}$ où I est le milieu de [AB].
2. Déterminer l'ensemble (Δ) , des points M de (P) tels que l'on ait : $MA^2 + MB^2 - 2\,MO^2 = \frac{AB^2}{2}$.

Thème 5 : GENERALITES SUR FONCTIONS NUMERIQUE D'UNE VARIABLE REELLE

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Soit f une application de E vers F, A une partie de E et B une partie de F.

Pour chacun des énoncés ci-dessous trois réponses dont une seule est exacte ont été données. Donner pour chaque énoncé la bonne réponse.

1. L'image directe de A par f notée $f(A)$ est :
   a. l'ensemble des $y \in F$ dont l'antécédent $x \notin A$;
   b. $\{f(x) \in F / x \in A\}$;
   c. $\{f(x) \in B / x \in A\}$.
2. L'image réciproque de B par f notée $f^{-1}(B)$ est :
   a. L'ensemble des $x \in E$ dont l'image $f(x) \notin B$;
   b. $\{x \in A / f(x) \in B\}$;
   c. $\{x \in E / f(x) \in B\}$.

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit (C_f), (C_g), (C_h), (C_i), (C_j) les représentations graphiques respectives des fonctions f, g, h, i, j et a et b deux réels.

Recopier et compléter les énoncés ci-dessous pour que les propositions obtenues soient vraies.

1. Si $g(x) = f(x - a)$ alors (C_g) se déduit de (C_f) par la ... de vecteur … .
2. Si $h(x) = f(x) + b$ alors (C_h) se déduit de (C_f) par la … de vecteur … .
3. Si $i(x) = -f(x)$ alors (C_i) et (C_f) sont … par rapport à … .
4. Si $j(x) = f(x - a) + b$ alors (Cj) se déduit de (C_f) par la … de vecteur… .

Exercice 3

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan, $\Omega(a, b)$ un point du plan et (C_f) la représentation graphique de la fonction f.

Recopier et compléter les énoncés ci-dessous pour que les propositions obtenues soient vraies.

1. On dit que la droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie de la courbe (C_f) si et seulement si (C_f) est la représentation graphique, dans $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$, d'une fonction… .
2. La droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie de la courbe (C_f) si pour tout réel x, si $a + x$ appartient à D_f , $a - x$ appartiennent à D_f et on a : ….=… .
3. La droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie de la courbe (C_f) si et seulement pour tout x appartenant à D_f, $2a - x$ appartient à D_f et ...=… .

4. On dit que $\Omega(a, b)$ est centre de symétrie de la courbe (C_f) si et seulement (C_f) est la représentation graphique, dans $(\Omega ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'une fonction… .

5. Le point $\Omega(a, b)$ est centre de symétrie de la courbe (C_f) si et seulement si pour tout réel x, si a + x appartient à D_f , ... appartient à D_f et on a : … =… .

6. Le point $\Omega(a, b)$ est centre de symétrie de la courbe (C_f) si et seulement si pour tout réel x appartenant à D_f , ... D_f et ….= … .

Exercice 4

Pour l'énoncé ci-dessous trois réponses dont une seule est exacte ont été données.

Donne le numéro de la bonne réponse.

Une application f de A dans B est une bijection si :

1. Chaque élément de B a un antécédent unique par f dans A ;
2. Chaque élément de B a au moins un antécédent par f dans A ;
3. Chaque élément de B a au plus un antécédent par f dans A.

Exercice 5

Pour l'énoncé ci-dessous quatre réponses dont une seule est exacte ont été données.

Donne le numéro de la bonne réponse qui lui correspond.

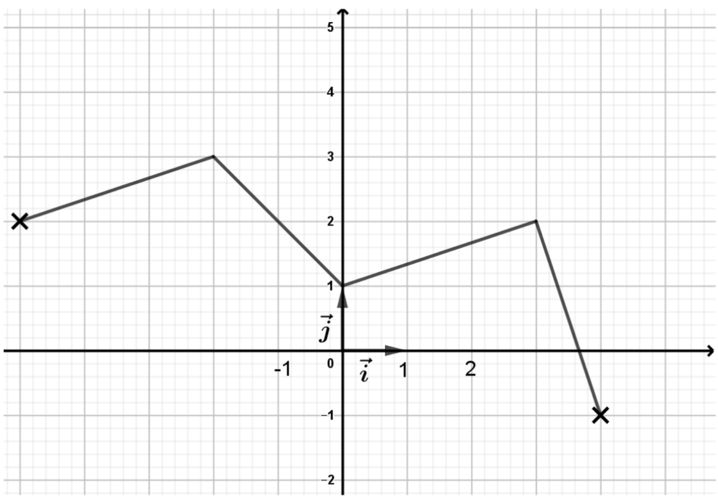
Soit h une fonction bijective de I vers J .On note (C_h) sa représentation graphique et$(C_{h^{-1}})$ la représentation graphique de sa bijection réciproque, h^{-1} dans un repère orthonormé.

1. Les courbes (C_h) et $(C_{h^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x.
2. Les courbes (C_h) et $(C_{h^{-1}})$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.
3. Les courbes (C_h) et $(C_{h^{-1}})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
4. Les courbes (C_h) et $(C_{h^{-1}})$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnés.

Exercices d'application

Exercice 6

On considère la courbe ci-contre représentant une fonction f dans le repère orthonormal indiqué



1. Reproduire la figure.
2. Construire la courbe représentative de chacune des fonctions g, h, k, m définies ci-dessous par :

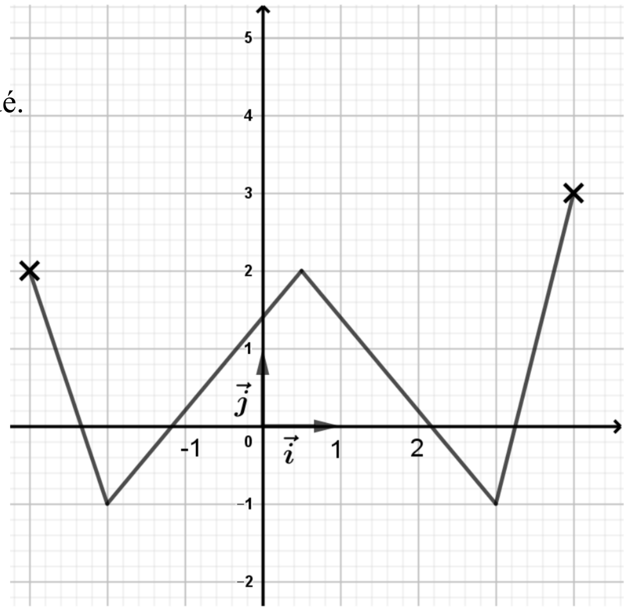
$g(x) = f(x-2)$, $h(x) = f(x) +1$,

$k(x) =f(x +1)$ et $m(x) = f(x) -2$.

On utilisera des couleurs différentes pour le tracé des courbes.

Exercice 7

On considère la courbe ci-contre représentant une fonction f dans le repère orthonormal indiqué.



1. Reproduire la figure.
2. Construire la courbe représentative de chacune des fonctions g , h , k et m définies ci-dessous par :

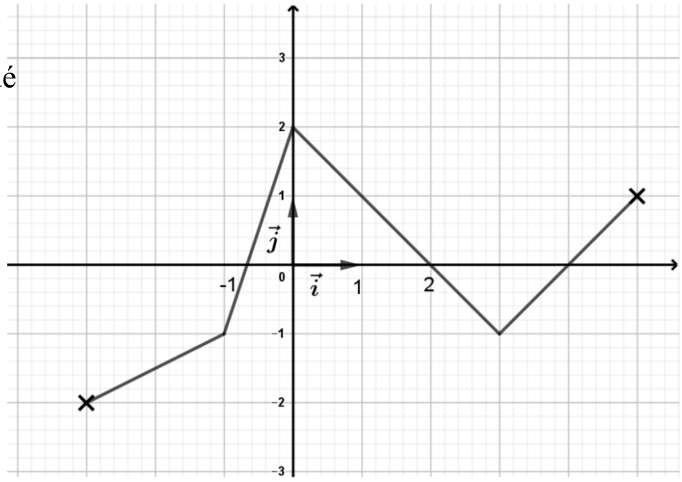
$g(x) = f(x-1)+2$, $h(x) = f(x+2) -3$,

$k(x) = f(-x)$, $m(x) = -f(x)$.

On utilisera des couleurs différentes pour le tracé des courbes.

Exercice 8

On considère la courbe ci-contre représentant une fonction f dans le repère orthonormal indiqué



1. Reproduire la figure.
2. Construire, la courbe représentative de chacune des fonctions g eth définies ci-dessous par :

$g(x) = |f(x)|$ et $h(x) = f(|x|)$

On utilisera des couleurs différentes pour le tracé des courbes.

Exercice 9

Construire la représentation graphique dans un repère orthonormal ($O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}$) de chacune des fonctions associées à la fonction f à partir de celle de f dans les cas ci-dessous :

1. $g(x) = \frac{1}{x-3}$ et $f(x) = \frac{1}{x}$;
2. $h(x) = x^3 + 2$ et $f(x) = x^3$;
3. $i(x) = -\frac{1}{x}$ et $f(x) = \frac{1}{x}$;
4. $j(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$ et $f(x) = \frac{1}{x}$;
5. $k(x) = |x|^3$ et $f(x) = x^3$;
6. $l(x) = 2(x-1)^2 + 3$ et $f(x) = 2x^2$.

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $[-3;\ 3]$ par $f(x) = |-3x|$, (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. En fonction des valeurs prises par x , exprimer f (x) sans le symbole de valeur absolue
2. Construire (C_f).
3. En déduire les courbes (C_g) et (C_h) des fonction g , h et k définies par :

   $g(x) = f(x) - 3$, $h(x) = f(x+2)$ et $k(x) = |g(x)|$.

Exercice 11

Soit la fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = x^2-3x+7$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer que la droite (D) d'équation $x = \frac{3}{2}$ est un axe de symétrie pour (C_f).

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \frac{2x^2-5x-1}{x-3}$ et $C_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer que $\Omega\ (3; 7)$ est un centre de symétrie pour $C_f)$.

Exercice 13

Soit l'application g définie de ℝ dans $\mathbb{R}_+$ par : $g(x) = x^2$.

L'application g est-elle une bijection ? Justifier votre réponse.

Si non, donner un sous ensemble de ℝ où g admet une restriction bijective et construire la courbe représentative de g^{-1}. à partir de celle de g.

Exercices de synthèse

Exercice 14

On considère les fonctions f et g définies de ℝ vers ℝ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 12x + 27} + \sqrt{x^2 - 9}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}{x^2 - 6x + 9}$.

Dans un repère orthogonal, montrer que :

1. La représentation graphique de f admet la droite (D) : $x = -3$ comme axe de symétrie.
2. La représentation graphique de g admet le point I (3 ; 0) comme centre de symétrie.

Exercice 15

1. Tracer dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative (C_f) de la fonction f définie de ℝ vers ℝ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{-2x+5}{x-2}$.

a. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in D_g$; $g(x) = a + \frac{b}{x-2}$.

b. Représenter graphiquement la courbe (C_g) à partir de (C_f).

3. Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = -1$.

4. Représenter graphiquement dans le repère précédent les fonctions h, k et g définies ci-dessous :

$h(x) = \frac{2x-5}{x-2}$, $k(x) = \frac{2|x|+5}{|x|-2}$ et $g(x) = \left|\frac{-2x+5}{x-2}\right|$.

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2-2x+6}{2x^2-4x+4}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Soit O' le point de coordonnées (1,0).

1. Déterminer une équation de (C) dans $(O' ; \vec{i}, \vec{j})$.
2. Démontrer que (C) admet la droite (Δ) d'équation $x = 1$ comme axe de symétrie.
3. Construire (C).

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Soit le point $I\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer une équation de (C) dans le repère $(I ; \vec{i}, \vec{j})$
2. Démontrer que (C) admet le point I comme centre de symétrie.
3. Construire (C).

Thème 6 : LIMITES- CONTINUITE

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Pour chacune des affirmations ci-dessous dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).

1. Si a $\in D_f$ alors la limite de f en a si elle existe est égale à f(a).

2. Lorsqu'une fonction admet une limite en a alors cette limite est unique.

3. Si une fonction f est continue en a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

4. Si f est une fonction continue en a alors' elle est … en a.

5. Lorsqu'une fonction f est continue en tout élément d'un intervalle I alors elle est …sur I.

Exercice 2

Donner les limites ci-dessous :

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x}$; 3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$; 5. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$.

Exercices d'application

Exercice 3

Calculer les limites ci-dessous :

1. $\lim\limits_{x\to 1}(2x^3 - 3x^2 + x + 1)$; 2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 3}$; 3. $\lim\limits_{x\to -1}(2x^3 - 3x^2 + 5)$;

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ (x - 4)$; 5. $\lim\limits_{x\to 2}(x + 3)(\frac{1}{x} - 4)$; 6. $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} 2x^3 - 3x^2 - 7$.

Exercice 4

Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ dans chacun des cas ci-dessous :

1. $f(x)= x^2 - 3x + 1$;

2. $f(x) = -4x^3 + 5x^2 - \frac{3}{2}x + 1$;

3. $f(x) = -5x^4 - 3x^3 + x$;

4. $f(x) = 2$;

5. $f(x) = -\sqrt{3}$.

Exercice 5

Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ dans chacun des cas ci-dessous :

1. $f(x) = \frac{-3x+1}{x-2}$;

2. $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x-2}$;

3. $f(x) = \frac{3x^2-5x+1}{-x^2+x-2}$;

4. $f(x)= \frac{-2x^3-3x^2+1}{5x+1}$;

5. $f(x)= \frac{3x+4}{-x^2+x-2}$.

Exercice 6

Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ lorsque c'est possible.

1. $f(x) = \sqrt{x+3}$;

2. $f(x) = \sqrt{-x-4}$;

3. $f(x) = \sqrt{4x-7}$;

4. $f(x) = \sqrt{-5x+1}$.

Exercice 7

Etudier la limite de la fonction f en a dans chacun des cas ci-dessous :

1. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $a = 2$;

2. $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x+1}$, $a = 1$;

3. $f(x) = \frac{3x^2+5x-2}{x^2+x-2}$, $a = 2$;

4. $f(x)= \frac{-2x^3-3x^2+1}{x^2+4x+3}$, $a = -1$;

5. $f(x)= \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, $a =1$;

6. $f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}$, $a = 3$;

7. $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$, $a = 1$;

8. $f(x) = \frac{2x-10}{\sqrt{x+11}-4}$, $a = 5$.

Exercice 8

Etudier la limite de la fonction f en a dans chacun des cas ci-dessous :

1. $f(x) = \frac{-3x+1}{x-2}$, $a = 2$;

2. $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x+2}$, $a = -2$;

3. $f(x) = \frac{3x^2-5x+1}{2x^2-x-1}$, $a = 1$ puis $a = \frac{-1}{2}$;

4. $f(x)= \frac{-2x^3+3x^2+1}{-x+1}$, $a = 1$;

5. $f(x)= \frac{5x+4}{x^2+2x+1}$, $a = -1$;

6. $f(x)= \frac{2x^2-3x+5}{4x^2-4x+1}$, $a = \frac{1}{2}$.

Exercice 9

Etudier la continuité de f en a dans chacun des cas ci-dessous :

1. $f(x)= 3x-1$, $a = 0$;

2. $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ si $x \neq -1$ et $x \neq 1$, $f(1) = 2$; $a = 1$;

3. $f(x) = x\sqrt{x} +1$, $a = 0$;

4. $f(x) = |x+1|$, $a = -1$.

Exercice 10

Etudier la continuité de f dans chacun des cas ci-dessous :

1. $f(x) = 2x-5$;
2. $f(x) = - x^2 +3x+2$;
3. $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$;
4. $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$;
5. $f(x) = \sqrt{x-3}$;
6. $f(x) = \sqrt{-2x-1}$.

Exercices de synthèse

Exercice 11

Etudier la limite de la fonction f en a dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-2x+5}{\sqrt{x-3}-1}$; $a = 4$; **2.** $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}+2x+5}{\sqrt{3x+13}-2}$; $a = -3$; **3.** $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x^2+x+3}-3}$; $a = 1$.

Exercice 12

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, déterminer l'ensemble définition D_f de f puis étudier les limites de f aux bornes de D_f dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f(x) = -x^3 + x$;
2. $f(x) = x^4 + 3x$;
3. $f(x) = \frac{-x}{2-x}$;
4. $f(x) = \frac{2x-5}{-x+1}$;
5. $f(x) = \frac{x+10}{x^2+6x+9}$;
6. $f(x) = \frac{-x^2+10}{x}$.

Exercice 13

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{|x^2-4|}{x-2}$; si $x \neq 2$ et $f(2) = -4$.

1. Ecrire f(x) sans le symbole de la valeur absolue.
2. Etudier la continuité de f en 2.
3. Déterminer les intervalles sur lesquels f est continue.

Exercice 14

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = ax + b \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = ax^2 - 3bx + 2 \text{ si } x > 1 \end{cases}$; a et b étant des nombres réels.

Déterminer a et b pour que f soit continue en 1.

Exercice 15

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x+b}{x+1} \text{ si } x < 0 \\ f(x) = 3ax + 1, \text{si } x > 0 \\ f(0) = -2 \end{cases}$; a et b étant des nombres réels.

Déterminer a et b pour que f soit continue en 0.

Thème 7 : DERIVATION

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Pour chacune des assertions ci-dessous dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).

1. Si f est dérivable en x_0 alors $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l, l \in \mathbb{R}$.

2. Si f est une fonction dérivable en x_0 et si $f'(x_0) = 0$ alors la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est parallèle à l'axe des ordonnées.

3. Si f est une fonction dérivable en x_0 et si $f'(x_0) = 0$ alors la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est parallèle à l'axe des ordonnées.

4. Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

5. Si f est une fonction dérivable en x_0 et que f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors f admet un extremum en x_0.

6. Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I alors la restriction de f à I est une bijection de I sur f(I).

7. Si f est une fonction dérivable à droite et à gauche en un réel a alors f est dérivable en a.

Exercice 2

Pour chacune des assertions ci-dessous, dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).

1. Si f est une fonction dérivable en a alors la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est la droite passant par le point de coordonnées (a , f(a)) et de coefficient directeur f '(a).
2. Si f n'est pas dérivable à droite en a alors sa courbe représentative admet au point d'abscisse a une demi-tangente verticale.
3. Si f n'est pas dérivable en a alors sa courbe représentative admet au point d'abscisse a une tangente verticale.

Exercices d'application

Exercice 3

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par : $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$.

Montrer que f est dérivable en 3 puis préciser f '(3).

Exercice 4

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie : $f(x) = \frac{-x}{2-x}$.

Etudier la dérivabilité de f en 1 et en -2.

Exercice 5

Soit f la fonction définie a variable réelle définie par $f(x) = \sqrt{x+2}$.

1. Etudier la dérivabilité de f en 0 et en -2.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
3. Interpréter graphiquement le résultat sur la dérivabilité de f en -2.

Exercice 6

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par : $f(x) = \sqrt{2x+1}$.

1. Etudier la dérivabilité de f en $-\frac{1}{2}$ et en 4.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4.
3. Interpréter graphiquement le résultat sur la dérivabilité de f en $-\frac{1}{2}$.

Exercice 7

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par $f(x) = |x - 3|$.

1. Ecrire f(x) sans le symbole de la valeur absolue.
2. Etudier la dérivabilité de f en : -1 ; 3 et 4.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -1.
4. Interpréter graphiquement le résultat sur la dérivabilité de f en 3.

Exercice 8

Soit g la fonction numérique à variable réelle par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ si } x < 0 \\ -1 \text{ si } x = 0 \\ x - 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}.$$

1. Etudier la dérivabilité de g en 0.
2. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 9

Soit g la fonction numérique à variable réelle définie par : $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-1} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2}x - \sqrt{x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}.$

1. Etudier la dérivabilité de g en 0.
2. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 10

Après avoir trouvé le domaine de définition de f étudier la dérivabilité de f puis déterminer f '(x) et son ensemble de définition (ensemble de dérivabilité de f), dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f(x)=2x^3$; **2.** $f(x)=5x^2$; **3.** $f(x)=3x\sqrt{x}$; **4.** $f(x)=\frac{-3}{x+1}$;

5. $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$; **6.** $f(x) = \frac{1}{3}x^2+ x+1$; **7.** $f(x) = 3x + 4 + \frac{1}{x}$; **8.** $f(x)=\frac{x^2-x+1}{2x+1}$.

Exercice 11

Dans chacun des cas ci-dessous f une fonction numérique à variable réelle

Etudier la dérivabilité de f puis déterminer f '(x), la dérivée de f.

1. $f(x) = \sqrt{2x-5}$;
2. $f(x) = \sqrt{-x-1}$;
3. $f(x) = \cos(-3x+5)$;
4. $f(x) = \sin(2x+\frac{\pi}{3})$;
5. $f(x)= (4x+1)^5$;
6. $f(x) = \frac{1}{6x-7}$.

Exercice 12

Déterminer le sens de variation de f puis préciser s'il existe un réel en lequel f admet un extrémum.

1. $f(x) = 2x^2 + 2x + 3$; **2**. $f(x) = x^3 - 3x + 2$; **3**. $f(x) = 3x + \sqrt{x}$; **4**. $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$;

5. $f(x) = \frac{2x^2-2x-2}{x+3}$; **6**. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x + 1$; **7**. $f(x) = 3x + 4 + \frac{1}{x+1}$.

Exercices de synthèse

Exercice 13

Après avoir précisé l'ensemble de dérivabilité de f , déterminer sa dérivée.

1. $f(x) = \frac{2x^2-x+3}{x^2-2}$;
2. $f(x) = \frac{4x^2-5}{3x^2+2x-3}$;
3. $f(x) = x^6\sqrt{x}$;
4. $f(x) = \sin x + \cos 4x$;
5. $f(x) = \frac{2x+1}{(3x+1)^3}$;
6. $f(x) = (3x^2 - x + 1)(-x^2 + x + 1)$;
7. $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{x+2}$;
8. $f(x) = |x^3 - 7x + 6|$.

Exercice 14

Dans chacun des cas suivants, déterminer les points de C_f où la tangente (T) à C_f répond à la condition indiquée.

1. $f(x) = x^3 + 3x^2$, le coefficient directeur de (T) est 0.
2. $f(x) = \frac{1}{x}$, (T) passe par le point B (2 ,- 4).
3. $f(x) = x - 1 + \frac{8}{x^2+1}$, (T) parallèle à la droite (D) : $y = x - 1$.

Exercice 15

Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = 3x^2 - 2x - b \text{ si } x < 2 \\ g(x) = \frac{2ax+b}{x-1} \text{ si } x > 2 \\ g(2) = b \end{cases}$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g soit continue sur ℝ.

2. Etudier alors la dérivabilité de g en 2.

Exercice 16

Soit f la fonction f la fonction définie sur ℝ par : f(x) = (1-x) $\sqrt{|1-x|}$.

1. Etudier la dérivabilité de f en 1.

2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f.

3. Déterminer f '(x) pour tout x appartenant à l'ensemble de dérivabilité de f .

Exercice 17

1. Montrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.

 a. f(x) = $\frac{2x-3}{x+4}$, I= [0 ; 2] ; **b.** f(x) = $\frac{-x+1}{x+3}$, I = [-7 ; -4] ; **c.** f(x) = $\frac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}$, I= [3; 10].

2. Dans chacun des cas suivants déterminer l'ensemble f(K).

 a. f(x) = $x^2 - 4x + 2$, K = [-2 ; 4] ; **b.** f(x) = $\frac{-x+1}{2x+1}$, K= [-1 ; +∞[; **c.** f(x) = $\sqrt{2x+3}$, K= [-1; 1].

Thème 8 : ETUDE ET REPRESENTATION GRAPHIQUE DE FONCTIONS

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Soit f une fonction numérique à variable réelle sur un intervalle I et C_f sa courbe dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Recopier et compéter les énoncés ci-dessous pour avoir une proposition vraie.

1. f est paire si … .
2. f est impaire si … .
3. Le point I de couple de coordonnes (a ; b) est centre de symétrie de la courbe de f si … .
4. La droite (D) : x = a est axe de symétrie a C_f si et seulement si … .

Exercice 2

Soit f une fonction numérique à variable réelle sur un intervalle I et C_f sa courbe dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Recopier et compéter les énoncés ci-dessous pour avoir des propositions vraies

1. f est continue à gauche de x_0 (x_0 un réel) si et seulement si … .
2. f est continue en x_0 (x_0 un réel) si et seulement si … .
3. f est continue sur un intervalle I si et seulement si … .
4. f est dérivable en x_0 si et seulement si … .
5. La droite d'équation y = ax + b est une asymptote oblique a la courbe de f si … .
6. Si la fonction f admet une limite infinie en x_o (x_o réel) alors la droite d'équation $x = x_0$ est une … . à la courbe représentative de f.

Exercices d'application

Exercice 3

Soit la fonction f la fonction numérique à variable réelle définie par $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

1. Etudier les variations de f puis dresser le tableau de variation de f.
2. Représenter graphiquement f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 4

Soit la fonction f numérique à variable réelle définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$ et (C_f) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

1. Etudier les variations de f puis dresser le tableau de variations de f.

2. Montrer que le point I(0 ; 1) est centre de symétrie de (C_f).

3. Construire (C_f).

Exercice 5

Soit la fonction f numérique à variable réelle définie par : $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ et (C_f) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormal$(O, \vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

1. a. Déterminer le domaine de définition de f.

   b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x diffèrent de 1, $f(x) = a + \frac{b}{x-1}$.

2. Montrer que le point I(1 ; 2) est centre de symétrie de (C_f).

3. Déterminer les coordonnées A , point d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.

4. Etudier les variations de f puis dresser le tableau de variation de f.

5. Construire (C_f).

Exercice 6

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par $f(x) = \frac{-x^2+x-2}{x+1}$ et C_f sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

1. Préciser le domaine de définition D_f de f puis étudier les limites de f aux bornes de ce domaine.
2. En déduire l'équation d'une asymptote à (C_f).
3. a. Trouver des réels a, b et c tels que pour tout x élément de D_f $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

   b. Monter que la droite (D) d'équation y = ax + b est une asymptote à (C_f).

   c. Etudier la position de (C_f). par rapport à (D).

4. Etudier les variations de f puis dresser le tableau de variation de f.

5. Construire (Cf).

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par. $f(x) = -x + 1 - \frac{4}{x^2}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. Démontrer que (C) admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
3. Etudier les variations de f puis dresser le tableau de variation de f.
4. Construire (C).

Exercice 8

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x+3}$ et (C_f) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier la dérivabilité de f.
2. Etudier les variations de f (sens de variation) puis dresser le tableau de variation de f.
3. a. Montrer C_f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $\frac{-3}{2}$.

   b. Construire C_f .

Exercice 9

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{-x+1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier la dérivabilité de f.
2. Etudier les variations de f puis dresser le tableau variation de f.
3. Construire (C_f).

Exercice 10

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \cos(2x)$.

1. Etudier la parité de f.
2. Etudier la périodicité de f.
3. Justifier le choix de $I = [0 , \frac{\pi}{2}]$ comme ensemble d'étude de f.
4. Etudier les variations de f sur I puis dresser son tableau de variation.
5. Représenter graphiquement f dans le plan muni d'un repère orthonormal.

Exercices de synthèse

Exercice 11

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^2+3x-2}{2x+2}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer D_f puis étudier les limites aux bornes des intervalles de D_f.
2. a. Montrer qu'ils existent des réels a, b et c tels que pour tout x de D_f ; $f(x) = ax + b + \frac{1}{x+1}$.

   b. En déduire que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à (C_f).

   c. Déterminer la position de (C_f) par rapport à (D).
3. Montrer que (C_f) admet une asymptote parallèle à (Oy) et donner son équation.
4. Etudier le sens de variation de f dans les intervalles où elle est définie.
5. On désigne par A le point de la courbe (C_f) ayant pour abscisse 0, déterminer une équation de la droite (T), tangente à la courbe (C_f) en A.
6. Construire, les asymptotes à (C_f), la droite (T) et la courbe (C_f).

Exercice 12

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+3x-2}{x^2-1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer D_f ensemble de définition puis les réels a et b tels que pour tout x de D_f,

   $f(x) = a + \frac{bx}{x^2-1}$.
2. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
3. Montrer que le point I de (C_f) d'abscisse 0 est un centre de symétrie de la courbe (C_f).
4. Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) en I.
5. Etudier la position de (C_f) par rapport à (T).
6. Tracer la courbe (C_f) et sa tangente (T).

Exercice 13

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f puis calculer les limites de f aux bornes de D_f

   En déduire les asymptotes éventuelles de (C_f).
2. Calculer f '(x) pour tout de D_f, et étudier son signe. Dresser le tableau de variation de f.
3. a. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{1-x}$.

   b. En déduire que (C_f) admet une asymptote (D) que l'on précisera.

   c. Etudier la position relative de (C_f) et de (D).

4. Construire (C_f) et ses asymptotes.
5. En déduire, dans le même repère que (C_f), la représentation graphique de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{x^2}{|1-x|}$.
6. a. Déterminer suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $x^2 + mx - m = 0$, où m est un réel.
   b. Retrouver les résultats graphiquement.

Exercice 14

On considère la fonction f à variable réelle définie par : $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x-1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer les réels a et b tels que (C_f) passe par le point A (0, 1) et admette en ce point une tangente horizontale.

1. On suppose a = 1 et b = – 1.
2. Déterminer les limites aux bornes de D_f.
3. a. Déterminer les réels α, β et γ tels que $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x-1}$.
   b. En déduire que la droite (D) : y = x + 2 est asymptote à (C_f).
   c. Préciser l'autre asymptote.
4. Etudier les variations de f puis dresser le tableau de variations de f.
5. Construire (C_f).
7. Résoudre graphiquement l'équation : $x^2 + (1 - m)x + m - 1 = 0$.
8. Soit la fonction g définie par : $g(x) = \frac{x^2 + x - 1}{|x-1|}$. Construire la courbe ($C_g$) de g à l'aide de ($C_f$).

Thème 9 : ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).

1. Tout angle orienté admet une mesure principale.
2. Un angle géométrique admet une infinité de mesures.
3. La mesure d'un angle géométrique appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.
4. Un angle orienté admet une infinité de mesures.

Exercice 2

Soit A, B et C des points du plan, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs non nuls du plan.

Recopier et compléter les propriétés ci-dessous pour avoir une proposition vraie.

1. $(\vec{u}\,,\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) \equiv \ldots$
2. $(\vec{u}\,,-\vec{v}) \equiv \ldots.. + \ldots$
3. $(\overrightarrow{BA}\,,\overrightarrow{AB}) \equiv \cdots$
4. $(\overrightarrow{BA}\,,\overrightarrow{BC}) \equiv (\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{BC}) + \cdots$
5. $(\overrightarrow{BA}\,,\overrightarrow{CB}) \equiv \cdots (\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{BC})$

2. Recopier et compléter chacune des égalités ci-dessous par ce qui convient pour avoir une proposition vraie.

1. $(\vec{u}\,,\vec{u}) \equiv \cdots$;
2. $(\vec{u}\,,-\vec{u}) \equiv \cdots$;
3. $(-\overrightarrow{2u}\,,3\vec{u}) \equiv \cdots$.

Exercice 2

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Pour chacune des affirmations ci-dessous dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).

1. $(\vec{u}\,,3\vec{v}) = 2(\vec{u},\vec{v})$;
2. $(-\vec{u}\,,-\vec{v}) = (\vec{u}\,,\vec{v})$;

3. $(\vec{u}, -\vec{v}) = -(\vec{u}, \vec{v})$;

4. $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$;

5. $(\vec{u}, -\vec{v}) + (\vec{u}, \vec{v}) = \pi$.

Exercice 5

Recopier et compléter les propriétés ci- dessous pour avoir une proposition vraie :

1. $\cos(a + b) = \cos(..)\cos(\dots)\dots\sin(\dots)\sin(\dots)$;
2. $\cos(a - b) = \cos(..)\cos(\dots)\dots\sin(\dots)\sin(\dots)$;
3. $\sin(a + b) = \sin(\dots)\cos(\dots)\dots\cos(\dots)\sin(\dots)$;
4. $\sin(a - b) = \sin(\dots)\cos(\dots)\ \dots\cos(\dots)\sin(\dots)$;
5. $\cos 2\theta = \cdots - 1$;
6. $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cdots$;
7. $\sin 2\theta = \cdots$;
8. $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \cdots$.

Exercice 6

Recopier et compléter les propriétés ci-dessous pour que la proposition soit vraie :

1. $\cos^2\theta = \frac{\dots\dots}{2}$;
2. $\sin^2\theta = \frac{\dots\dots}{2}$;
3. $\cos(a + b) - \cos(a - b) = \dots\dots$;
4. $\sin a \cos a = \cdots$ ·

Exercices d'application

Exercice 7

Dire si les affirmations suivantes sont vraies (V) ou fausses (F). Ecrire le numéro suivi de (V) ou (F).

1. Le réel $\frac{3\pi}{2}$ est une mesure de $\frac{\widehat{31\pi}}{2}$.
2. Le réel $\frac{-\pi}{4}$ est la mesure principale de $\frac{\widehat{51\pi}}{4}$.
3. Les réels $\frac{130\pi}{3}$ et $-\frac{302\pi}{3}$ mesurent le même angle orienté.

Exercice 8

1. Donner la mesure principale des angles dont une mesure est :

$\frac{3\pi}{2}$; 2π ; -62π ; $-\pi$; -5π ; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{-32\pi}{5}$; $\frac{749\pi}{13}$.

2. Dans chaque cas, dire si x et y sont des mesures d'un même angle orienté ou non.

a. $x = \frac{\pi}{2}$; $y = -\frac{3\pi}{2}$; **b.** $x = \frac{2\pi}{3}$; $y = -\frac{\pi}{3}$; **c.** $x = -\frac{5\pi}{4}$; $y = \frac{3\pi}{4}$; **d.** $x = -\frac{5\pi}{12}$, $y = \frac{43\pi}{12}$.

Exercice 9

Donner la mesure principale θ des angles orientés dont une mesure est α dans chacun des cas suivants :

1. $\alpha = \frac{-197\pi}{3}$;
2. $\alpha = \frac{7\pi}{8}$;
3. $\alpha = 18\pi$;
4. $\alpha = -934\pi$;
5. $\alpha = -851\pi$.

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct. Sur un cercle trigonométrique de centre O (unité graphique 4 cm), on considère un point A.

1. Placer les points B, C, D, E et F tels que :

$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$; $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) = \frac{5\pi}{6}[2\pi]$; $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}\right) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$; $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}\right) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF}\right) = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$ ·

2. Déterminer en radians la mesure principale des angles orientés :

$\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OA}}\right)$.

3. Calculer les mesures en radians des arcs : $\overset{\frown}{EF}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ et $\overset{\frown}{DE}$.

Exercice 11

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct.

Construire un triangle équilatéral ABC.

Quelles sont les mesures principales en radians des angles orientés $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}\right)$?

Exercice 12

Soit (P) le plan orienté , ABCD est un losange direct de centre O et BD = AD. Le point I désigne le milieu de [CD]. Déterminer la mesure principale, en radians, des angles orientés :

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{AD}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BO}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{AC}}\right)$.

Exercice 13

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct.

1. Placer sur un cercle trigonométrique les points-images des réels ci-dessous et calculer le cosinus et le sinus de ces réels (les mesures d'angles sont en radians) :

69π ; -118π ; $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{47\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{50\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{-5\pi}{4}$; $\frac{181\pi}{4}$; $\frac{-11\pi}{6}$; $\frac{199\pi}{6}$.

2. Exprimer, à l'aide de sinx et cosx :

$H(x) = \sin(6\pi - x) + \sin\left(x - \frac{33\pi}{2}\right) + \cos(-49\pi - x) + \cos\left(\frac{-25\pi}{2} - x\right)$.

Exercice 14

1. Sachant que $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.

2. En déduire $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$, $\tan\frac{7\pi}{12}$, $\tan\frac{11\pi}{12}$ et $\cos\frac{13\pi}{12}$.

Exercice 15

On donne $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

1. Montrer que $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

2. Utiliser les relations trigonométriques pour donner les valeurs exactes de :

$\sin\frac{4\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}$, $\sin\frac{3\pi}{10}$, $\cos\frac{3\pi}{10}$, $\sin\frac{6\pi}{5}$, $\cos\frac{6\pi}{5}$, $\sin\frac{7\pi}{10}$ et $\cos\frac{7\pi}{10}$.

Exercice 16

On donne $\cos a = -\frac{4}{5}$ et $\pi \leq a \leq \frac{3\pi}{2}$.

1. Calculer : $\sin a$, $\sin(-a)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)$, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}+a\right)$, $\tan a$ et $\tan(\pi - a)$.

2. Le réel x est un nombre de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right[$ et $\sin x = \frac{3}{5}$.

   Calculer $\cos x$ et $\tan x$ (sans calculer x).

3. Le réel x est un nombre de l'intervalle $\left]\pi\ ;\frac{3\pi}{2}\right[$ et $\cos x = \frac{-2}{3}$.

   Calculer $\sin x$ et $\tan x$ (sans calculer x).

Exercice 17

1. Sachant que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right[$ et que $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, trouver $\cos\alpha$ et $\tan\alpha$.

2. Sachant que $\alpha \in\ ]\pi\ ; 2\pi[$ et que $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, trouver $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$.

3. Calculer les valeurs exactes de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ avec $\tan\alpha = \frac{-4}{3}$ et $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

4. Déterminer une valeur approchée, en radians, du réel x tel que $\cos x = 0{,}4$ et $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

Exercice 18

Soit x un nombre réel. Démontrer les égalités suivantes :

1. $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$;

2. $\frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1+\sin x}$;

3. $(1 + \sin x + \cos x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$;

4. $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$;

5. $\sin^4 x - \cos^4 x + 2\cos^2 x = 1$.

Exercice 19

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

1. $\cos x = \cos\frac{\pi}{5}$;

2. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x$;

3. $\cos x = \sin\frac{\pi}{8}$;

4. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$;

5. $\tan x = \tan(-\frac{\pi}{12})$;

6. $\tan 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 20

1. Donner l'ensemble des solutions de chacune des équations de l'exercice 19 dans :

a. $I=[0 ; 2\pi]$; b. $I = [-\pi; \pi]$.

2. Représenter sur le cercle trigonométrique ces ensembles.

Exercice 21

Résoudre les inéquations dans chacun des intervalles donnés puis représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

1. $I = [0 ; 2\pi]$ **2**. $I = [-\pi; \pi]$

a. $\cos x \leq \cos\frac{\pi}{6}$;

b. $\cos x < \cos(-\frac{\pi}{4})$;

c. $\sin x \leq \sin\frac{2\pi}{3}$;

d. $\cos x \leq -\frac{1}{2}$;

f. $\tan x \leq \sqrt{3}$;

g. $\tan x \leq 1$;

e. $0 \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$.

Exercices de synthèse

Exercice 22

Les questions 1. , 2. ,… sont indépendantes.

1. On donne les vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $(\vec{u},\vec{v}) \equiv \frac{3\pi}{5}\,[2\pi]$ et $(\vec{u},\vec{w}) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$ Calculer $(\vec{v},\vec{w})$.
2. On considère un triangle ABC de sens direct.

   Démontrer que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) \equiv \pi[\pi]$
3. On donne $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{3\pi}{4}$ et $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) \equiv \frac{\pi}{5}\,[2\pi]$.

   Calculer $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$.
4. A, B, C et D sont des points du plan tels que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{3\pi}{4}\,[2\pi]$; $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right) \equiv \frac{-2\pi}{3}\,[2\pi]$;

   $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{-5\pi}{12}\,[2\pi]\cdot$

   Démontrer que les points A, E et C sont alignés.

Exercice 23

Soit un nombre réel α tel que : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\cdot$

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = 2\alpha$.

H et I sont les pieds des hauteurs issues respectivement de A et B.

On pose : $a = AB$.

1. Démontrer que : $BC = 2a\sin\alpha$.
2. Démontrer que : $BI = BC\cos\alpha$.
3. Démontrer que : $BI = a\sin 2\alpha$.
4. En déduire que : $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.
5. <u>Application</u> : Sachant que $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, déterminer $\sin\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}\cdot$
4. En remarquant que $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$, calculer : $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}\cdot$
5. Calculer $\sin\frac{\pi}{5}\cdot$

Exercice 24

1. On pose : $A = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{2\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{4\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{6\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}\cdot$

   Montrer que $A = 3$.

2. Calculer les expressions ci-dessous :

   $B = \sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{2\pi}{12} + \sin^2\frac{3\pi}{12} + \ldots + \sin^2\frac{11\pi}{12}$; $C = \cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}\cdot$

Exercice 25

Soit ABC un triangle non rectangle.

1. Vérifier que $\tan\left(\pi - \widehat{A}\right) = \tan\widehat{A}$.
2. Démontrer que : $\tan\left(\widehat{A} + \widehat{B}\right) = -\tan\widehat{C}$ et $\tan\left(\widehat{A} + \widehat{B}\right) = \frac{\tan\widehat{A} + \tan\widehat{B}}{1 - \tan\widehat{A}\tan\widehat{B}}$.
3. Prouver que : $\tan\widehat{A} + \tan\widehat{B} + \tan\widehat{C} = \tan\widehat{A}\tan\widehat{B}\tan\widehat{C}$.
4. Montrer que : $\sin\widehat{A} + \sin\widehat{B} + \sin\widehat{C} = 4\cos\frac{\widehat{A}}{2}\cos\frac{\widehat{B}}{2}\cos\frac{\widehat{C}}{2}$.

Exercice 26

1. Rappeler les formules de linéarisation $\cos p \cos q$, $\sin p \sin q$ puis linéariser les expressions ci-dessous :

$A = \cos 3x \cos 2x$;

$B = \sin x \sin 3x$;

$C = \sin^2 2x \sin 4x$.

2. Exprimer $\sin 3x$ et $\cos 3x$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.
3. En déduire que $\tan 3x = \tan x\left(\frac{3 - \tan^2 x}{1 - 3\tan^2 x}\right)$.

Exercice 27

Soit x un nombre réel. Démontrer les égalités suivantes :

1. $\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 1$;

2. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$;

3. $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$ $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$;

4. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$;

5. $1 + \sin x = \left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2$;

6. $\sin^6 x + \cos^6 x + 3\cos^2 x \sin^2 x = 1$.

Exercice 28

On pose : $A = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$; $B = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$.

Calculer A+B et A−B.

En déduire les valeurs exactes de A et de B.

Exercice 29

Résoudre les équations ci-dessous dans l'intervalle $I = \mathbb{R}$:

1. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$;
2. $\cos x + \cos 3x = \sin x + \sin 3x$;
3. $\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x = 1$.

Exercice 30

Résoudre les équations ci-dessous dans l'intervalle I = [0 ; 2π] :

1. $\tan^2 x = 3$;

2. $\tan 2x = 3\tan x$;

3. $2\cos^2 x + 9\cos x - 5 = 0$.

Exercice 31

Résoudre les équations ci-dessous dans l'intervalle I = [− π ; π] :

1. $\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$;

2. $\tan 2x = \tan\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$;

3. $\tan x \times \tan 3x = -1$;

4. $1 + \frac{\sin x}{2} = \cos^2 x$;

5. $2\sin^2 x + \cos 4x - 1 = 0$.

Thème 10 : PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Pour chacune des propositions ci-dessous, dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non nuls de l'espace et O un point de l'espace.

1. Le triplet ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est une base orthogonale de l'espace lorsque $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs non coplanaires.
2. Le triplet ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est une base orthogonale de l'espace lorsque $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux.
3. Le triplet ($\vec{i}$, $\vec{j}$,$\vec{k}$) est une base orthogonale de l'espace lorsque $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 0$.
4. Le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est un repère orthonormal de l'espace lorsque $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} =0$ et les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs unitaires.
5. Le repère (O ;$\vec{i}$, $\vec{j}$,$\vec{k}$) est un repère orthonormal de l'espace lorsque le vecteur $\vec{k}$ est à la fois orthogonal à $\vec{i}$ et à $\vec{j}$ et les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs unitaires.
6. Le repère (O ;$\vec{i}$, $\vec{j}$,$\vec{k}$) est un repère orthonormal de l'espace lorsque $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 0$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| =1$.

Exercices d'application

Pour les exercices 2 à 6, l'espace est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$,$\vec{k}$).

Exercice 2

Soient les points A (2 ; 0 ;-1), B (1 ; 1 ;-3) et C (3 ;0 ;-1).

Calculer les longueurs des segments [AB], [AC] et [BC].

Exercice 3

Soient les points A (2 ; 3 ; 1), B (1 ; 2 ; 5) et C (4 ; 5 ; 2).

1. Calculer les longueurs des segments [AB], [AC] et [BC].
2. En déduire que le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice 4

Soient les points A (-2 ;5 ;2) et B (m ;3 ;1) où m est un nombre réel.

Déterminer m pour que AB=7.

Exercice 5

Soient les points M(1 ;2 ;3) , N(-2 ;-4 ;6) et P(-1 ; -2 ; 1)

1. Déterminer les couples de coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{NP}$.

2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont orthogonaux.

3. En déduire la nature du triangle MNP.

Exercice 6

Ecrire une équation de la sphère :

1. de centre Ω (-3 ; 2 ;-1), de rayon 4 ;

2. de centre Ω (2 ;-1 ; 3), passant par le point A (-1 ; 4 ; 2) ;

3. de diamètre [AB] avec A (4 ;-3 ; 1), B (6 ;-7 ; -5) ;

4. passant par O, A (4 ; 0 ; 0) , B(0 ; 2 ; 0) , C(0 ; 0 ; -6). (On précisera son centre et son rayon.)

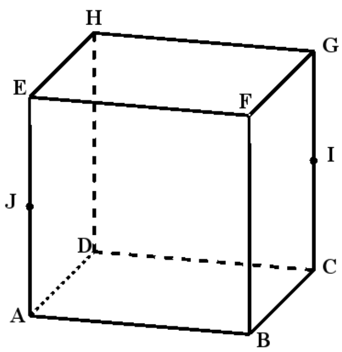
Exercice 7

On considère le cube ABCDEFGH d'arête r. I et J sont les milieux des arêtes [AE] et [CG].

1. a. Justifier que le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$) est un repère orthogonal de l'espace.

   b. Dans quelle condition est-il orthonormal ?

2. Déterminer le triplet de coordonnées de chacun des sommets du cube et des points I et J.



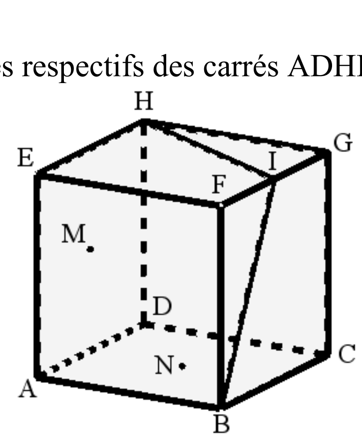
Exercices de synthèse

Exercice 8

Soit ABCDEFGH un cube d'arête c . On appelle M et N les centres respectifs des carrés ADHE et ABCD et I le milieu de [FG] .(voir figure ci-contre)

On munit l'espace du repère orthonormal (A ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) , où

$\vec{\imath} = \frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{AD}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{AE}\overrightarrow{AE}$.



1. a. Déterminer les couples de coordonnées des points B, D et E.

 b. En déduire les couples de coordonnées des points M et N.

2. Calculer la longueur MN.

 a. Calculer les couples de coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IH}$.

 b. Montrer que le triangle BIH est isocèle en I. Ce triangle est-il rectangle ?

Thème 11 : SUITES NUMERIQUES

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est par vraie (V) ou par fausse (F) .

1. Une suite numérique est une application de $\mathbb{R}$ (on d'une partie I de $\mathbb{R}$) vers $\mathbb{R}$.

2. Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

3. Une suite qui tend vers $+\infty$ ne peut pas être majorée.

Exercice 2

Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).

1. Une suite convergente est bornée.

2. Une suite bornée est convergente.

3. Toute suite croissante et majorée est convergente.

4. Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Exercice 3

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison $q \in]0 ; +\infty [$.

On note $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).

1. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_n > 2000$, alors $q > 1$.

1. Si $q < 1$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < U_n < 2$.

3. Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

Exercice 4

Pour chacune des affirmations **1.** et **2.** ci-dessous, dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Soient ℓ un réel et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle à termes tous strictement positifs. On suppose que (U_n) converge vers ℓ.

1. ℓ est strictement positif.

2. Il existe n entier naturel tel que ℓ soit une valeur approchée de U_n à 10^{-3} près.

Exercice 5

Soit f une fonction numérique et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites réelles définies respectivement par : $U_n = f(n)$ et $V_{n+1} = f(V_n)$.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, répondre par vrai (V) ou par faux (F).

1. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

2. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$.

4. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercices d’application

Exercice 6

1. La suite (t_n) est définie pour tout entier n par $t_n = n^2 - 3n + 2$. Est-elle arithmétique ?
2. Soit (W_n) une suite géométrique de premier terme W_0 et de raison q telle que $W_2 = -18$ et $W_4 = -162$. Déterminer q et V_0 ·
3. Soit (V_n) une suite arithmétique de raison r telle que $V_1 = -6$ et $V_1 + V_2 + \ldots + V_8 = 92$. Calculer V_8 et r.
4. Calculer la somme $S = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{32768}$ ·
5. Calculer la somme $S = 2 + 5 + 8 + \cdots + 32 + 35$.
6. La suite (U_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $U_0 = 3$. Calculer n sachant que $U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n = 196605$.
7. Déterminer trois nombres a, b et c en progression arithmétique dont la somme est 27 et la somme des carrés est 261.

Exercice 7

Dans cet exercice les questions 1, 2., … sont indépendantes.

1. Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 5U_n + 4, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ ·

   Montrer que, pour tout entier n, $U_n > 0$.
2. Démontrer que pour tout n entier, $4^n + 5$ est un multiple de 3.
3. Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = 5 - 4U_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ ·

   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : U_n = (-4)^{n+1} + 1$.
4. On pose $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ où $n \geq 1$.

   Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ·
5. Montrer par un raisonnement par récurrence que l’on a pour tout entier naturel n : $3^n > n$.
6. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ·
7. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \cdot$$

8. On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{k=n} (2k-1) \cdot$$

   Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = n^2$.

Exercice 8

Etudier le sens de variation des suites ci-dessous :

1. La suite (U_n) définie par $U_n = 2n^2 - 3n - 2$, pour $n \in \mathbb{N}$.
2. La suite (V_n) définie par $V_n = 1 + \frac{1}{n+1}$, pour $n \in \mathbb{N}$.
3. La suite (W_n) définie par $W_n = \frac{3n-1}{2-5n}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 3}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite et conjecturer le sens de variation de (U_n).
   Démontrer cette conjecture.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < U_n < 3$.

Exercices de synthèse

Exercice 10

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{2U_n}{2+3U_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer U_1 et U_2. La suite (U_n) est-elle :
   a. arithmétique ?
   b. géométrique ?
2. On suppose que pour tout entier n, on a $U_n \neq 0$, et on définit la suite (V_n) par : $V_n = \frac{1}{U_n}$.
   a. Montrer que la suite (V_n) est arithmétique et préciser sa raison.
   b. Donner l'expression de V_n en fonction de n puis celle de U_n en fonction de n.
3. Etudier la monotonie de la suite (U_n).
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < U_n \leq 1$.

Exercice 11

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = \frac{1}{4} U_n + 3$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer U_1 et U_2.
2. Justifier que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
3. Soit la suite (V_n) définie pour tout n par $V_n = U_n - 4$.
   a. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Donner l'expression de V_n puis de U_n en fonction de n.

c. Montrer que (U_n) est croissante.

d. Montrer que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

e. Soit n un entier naturel. Calculer $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ ·

Exercice 12

On considère la suite (U_n)définie sur ℕ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n+2}{2U_n+1}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$ ·

1. a. Calculer U_1, U_2, U_3, U_4.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_n > 0$.

c. Vérifier que si n est l'un des entiers suivants : 0, 1, 2, 3, 4 alors $U_n - 1$ a même signe que $(-1)^n$.

d. Etablir que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} - 1 = \frac{-U_n+1}{2U_n+1}$ ·

e. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n - 1$ a même signe que $(-1)^n$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+1}$ ·

a. Etablir que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = \frac{-1+U_n}{3U_n+3}$ ·

b. Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme. En déduire l'expression de V_n en fonction de n.

c. Montrer que pour tout n, $U_n = \frac{1+V_n}{1-V_n}$ ·

d. Exprimer U_n en fonction de n puis déterminer la limite de la suite (U_n).

Exercice 13

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (U_n) définie sur ℕ par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{7}{U_n}\right), n \in \mathbb{N} \end{cases}$ ·

1. Démontrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n > 0$.

2. On désigne par f la fonction définie sur] 0,+∞ [par : $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{7}{x})$.

a. Démontrer que la fonction f admet un minimum.

b. En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \geq \sqrt{7}$.

3. a. Etudier le sens de variation de la suite (U_n).

b. Montrer que la suite (U_n) est convergente ?

c. Montrer que la limite ℓ de cette suite vérifie $\ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{7}{\ell})$. Déterminer ℓ.

4. Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(U_n - \sqrt{7})^2}{U_n}$.

5. On définit la suite (d_n) par : $\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_{n+1} = \frac{1}{2} {d_n}^2, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

a. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n - \sqrt{7} \leq d_n$.

b. En déduire une inégalité vérifiée par d_5.

c. Justifier que U_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} prés.

Exercice 14

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n - 1}{U_n + 2}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle] -2 ,+∞ [par : $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$.

On a, pour tout nombre entier naturel n, $U_{n+1} = f(U_n)$.

1. Construire la courbe (C) représentative de la fonction f ainsi que la droite (Δ) d'équation $y = x$.
2. a. Sur l'axe des abscisses, placer U_0, puis construire U_1, U_2 et U_3.
   b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (U_n) ?
3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, $U_n - 1 > 0$. b. Démontrer les conjectures émises à la question **1.b.**
4. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (U_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de U_n en fonction de n.

   Pour tout nombre entier naturel n, on pose $V_n = \frac{1}{U_n - 1}$.

   a. Démontrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.

   b. Pour tout nombre entier naturel n, exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

   c. En déduire la limite de la suite (U_n).

Thème 12 : STATISTIQUES

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1
On donne la série statistique définie par le tableau ci-dessous :

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_{10}
y_i	y_1	y_2	y_3	…	y_{10}

1. Donner les expressions des moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$.
2. Donner les coordonnées de deux points permettant de tracer une droite d'ajustement par la méthode de Mayer.
3. Donner l'expression de la variance V(Y) et celle de l'écart type σ(X).

Exercices d'application

Exercice 2
Un responsable de ventes de magasin analyse l'évolution de son chiffre d'affaires sur la dernière période. Il relève pour cela le montant des frais de publicité engagés sur la même période. Il dresse le tableau suivant (les montants sont exprimés en milliers de francs cfa)

Frais de publicité x_i	10	6	6,5	11,5	11	8	7	6,5	11	9
Chiffre d'affaires y_i	250	220	228	262	268	244	240	222	259	246

1. Représenter le nuage de cette série.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen.
3. Tracer à « main levée » une droite d'ajustement affine puis déterminer une équation de cette droite.
4. a. Reproduire puis compléter le tableau ci-dessous:

	Série 1					Série 2				
Frais de publicité x_i	6	6,5			8	9		11		11,5
Chiffre d'affaires y_i	220									262

   b. Calculer les coordonnées de G_1, point moyen de la série 1.

   c. Calculer les coordonnées de G_2, point moyen de la série 2.

d. Tracer la droite (G_1G_2) dans le même repère.

e. Déterminer une équation de la droite (G_1G_2).

5. Le responsable des ventes veut estimer le chiffre d'affaires qu'il espère réaliser s'il engage 1 300 000 fcfa de frais de publicité.

a. Déterminer graphiquement le chiffre d'affaires espéré.

b. Déterminer par le calcul ce chiffre d'affaires.

Exercice 3

On considère la série double (x,y) définie par le tableau ci-dessous :

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	5	7	6	3
x_2	3	8	5	2
x_3	2	5	2	2

1. Déterminer l'effectif du couple ($x_2; y_3$) .
2. Déterminer la valeur de $n_{2\,1}$.
3. Déterminer l'effectif de x_3.
4. Déterminer la fréquence de y_2.
5. Déterminer la fréquence conditionnelle f_{x_2/y_3} .

Exercices de synthèse

Exercice 4

Une entreprise a mis au point un nouveau produit et cherche à en fixer le prix de vente. Une enquête est réalisée auprès des clients potentiels ; les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous, où y_i représente le nombre d'exemplaires du produit que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente, exprimé en milliers de francs, est x_i.

x_i	60	80	100	120	140	160	180	200
y_i	952	805	630	522	510	324	205	84

5. Représenter le nuage de la série (x, y).
6. Déterminer une droite d'ajustement par la méthode de Mayer.
7. Estimer, à un millier de francs près, le prix de vente de 980 exemplaires.

Exercice 5

Lors d'une enquête portant sur 100 familles, on a réalisé le nombre x d'enfants et le nombre y de pièces de leurs habitations. Les résultats sont représentés dans le tableau à double entrée ci-dessous :

y_i \ x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	6	3	3	2	0	0	0	0	0
2	3	3	6	7	3	1	0	0	0
3	1	1	4	7	7	5	4	2	0
4	0	2	3	5	4	5	6	5	3

1. Représenter à l'aide d'un tableau chaque série marginale.
2. Déterminer les fréquences marginales pour chacune des séries.
3. Déterminer la moyenne de chacune de ces séries marginales.
4. Déterminer la série conditionnelle de Y sachant x= 4.

5 . Déterminer la série conditionnelle de x sachant y = 2.

Exercice 6

Une étude du service des transports sur les causes des accidents donne les résultats ci-contre.

Type de transport Y / Cause des accidents X	Particuliers Y_1	Transporteurs en commun Y_2
Accidents liés à l'excès de vitesse : X_1	440	360
Accidents à cause mécanique X_2	110	90

1. Déterminer l'effectif total des accidents enregistrés lors de cette étude.
2. Déterminer les fréquences conditionnelles f_{Y_2/X_1} et f_{X_2/Y_1}.
3. Déterminer les fréquences marginales $f_{.1}$ et $f_{2.}$.

Thème 13: DENOMBREMENT

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Recopier et compléter chacun des énoncés ci-dessous par le symbole, mot ou groupe de mots qui convient , choisi dans la liste suivante : fini , pleine , appartient , { } , éléments , Ω , x , $\overline{A}$, card , sous-ensemble , cardinal , A , complémentaire, partie, vide , ⊂ , P(Ω) , ∅ .

1. Soit x un élément de Ω . On dit aussi x …à… . Ce qui se note…∈... .
2. On dit que Ω est un ensemble fini lorsqu'il a un nombre... d'... .
2. Le nombre d'éléments d'un ensemble fini Ω est appelé le….de Ω. On le note …(...).
3. Si A est un ensemble tel que tout élément de A est aussi un élément de Ω alors on dit que A est une ....ou un … de Ω. On note dans ce cas ... .
4. L'ensemble … est une partie de tout ensemble. On le note … ou … .
5. L'ensemble Ω est une partie de Ω appelée … .
6. Tous les sous-ensembles de Ω forment un ensemble appelé … des … de Ω. On le note … .

Exercice 2

Soit A, B et C des ensembles finis .

1. Donner le nom et la notation de chacun des ensembles ci-dessous :
   a. « ensemble des éléments communs à A et à B » ;
   b. « ensemble des éléments appartenant à A ou à B ».
2. Recopier et compléter par ce qui convient chacun des énoncés ci-dessous.
   a. Les ensembles A et B sont disjoints cela signifie que ... = ∅.
   b. card (A∪B) =…+… .
   c. Si les ensembles A et B sont disjoints alors card (A∪B) =… .
   d. L'ensemble de tous les couples (a ;b) tels que a ∈ A et b ∈ B est le….de A et B. On le note… .
   e. card (A×B) =… .

Exercice 3

Soit A, B et C des parties d'un ensemble Ω telles que C⊂B.

1. Donner la définition de « complémentaire de C dans B ». On note C_B^C cet ensemble.
2. On considère les deux tableaux I et II ci-dessous. Dire pour chaque énoncé du tableau I l'énoncé du tableau II qui lui correspond.

Tableau I

N°	Enoncés
1	$\overline{A} \cap \overline{B}$
2	$\mathrm{Card}\left(C_B^C\right)$
3	Card (A^p)
4	$\overline{A \cap B}$
5	Card(A) ×Card(B)
6	Card($\overline{A}$)

Tableau II

N°	Enoncés
A	$\overline{A} \cup \overline{B}$
B	Card(Ω)-Card(A)
C	Card(A×B)
D	$\overline{A \cup B}$
E	$\left(\mathrm{Card}\ (A)\right)^p$
F	$\mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}\ (C)$

Exercices d'application

Exercice 4

Dans une classe de 35 élèves, le professeur de Mathématiques pose les deux questions suivantes à chacun de ses élèves qui répondent par oui ou par non.

Question 1 : Aimez-vous les Maths ?

Question 2 : Aimez-vous votre lycée ?

Le professeur constate que :

- vingt élèves ont répondu oui à la question 1 ;
- douze élèves ont répondu non à la question 2 ;
- cinq élèves ont répondu non aux deux questions.

On note A et B l'ensemble des élèves ayant répondu par respectivement oui à la question 1 et à la question 2.

1. En utilisant A et B, interpréter les nombres 20 ; 12 et 5 en termes de cardinal.
2. Calculer le nombre d'élèves ayant répondu oui aux deux questions.

Exercice 5

A leur inscription à une série donnée, les élèves choisissent une langue (Anglais ou Espagnol) et une option (Informatique, Sciences Physiques (SP) ou Sciences de la vie et de la terre (SVT)). Dans un groupe d'élèves, 12 élèves sont inscrits en SVT, 15 en SP, 16 étudient l'espagnol. Par ailleurs, 8 inscrits en SVT et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en SP étudient l'espagnol.

Indiquer la répartition des élèves par discipline, ainsi que le nombre total d'élèves dans le groupe.

Indication : Reproduire et compléter le tableau à double entrée ci-dessous:

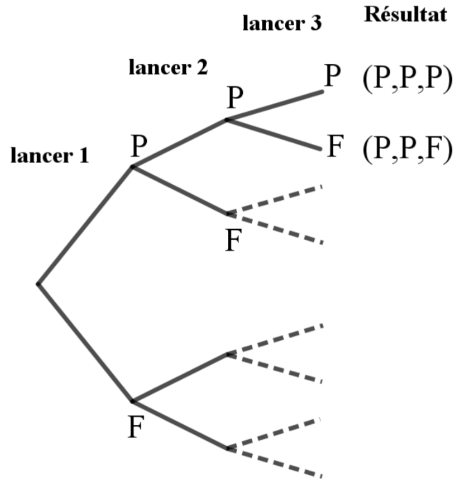
	SVT	Informatique	SP	Total
Anglais	8			
Espagnol				16
Total				

Exercice 6

On jette trois fois de suite une pièce de monnaie et on s'intéresse aux différentes occurrences :

Pile (P) ou Face (F).

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.
2. Déterminer alors le nombre de résultats possibles.



Exercice 7

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12.

On tire 3 boules de cette urne.

Calculer le nombre de tirages distincts dans les trois cas suivants :

1. Les boules sont tirées l'une après l'autre en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'une.
2. Les boules sont tirées l'une après l'autre sans les remettre dans l'urne.
3. Les trois boules sont tirées simultanément.

Exercice 8

Dans chacune des 6 situations ci-dessous, on note **Ω** l'ensemble de tous les résultats possibles.

Décrire **Ω** puis déterminer card **Ω**.

1. On lance trois fois de suite un dé cubique à six faces numérotées de 1 à 6 et on appelle résultat une suite de trois numéros ainsi obtenus.
2. On lance trois dés cubiques A ,B et C à six faces numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse aux trois numéros affichés sur les faces supérieures après immobilisation des dés.
3. Dix-sept chevaux sont au départ d'un grand prix et on s'intéresse aux nombre de quartés possibles.
4. Dans une classe de Première S1 de 15 élèves, on veut former une délégation de trois élèves.
5. Dans une classe de Première S1 de 15 élèves, on veut primer les cinq premiers élèves.
6. Dans une assemblée de 25 membres, on veut former un bureau composé d'un président, d'un vice-président, d'un secrétaire général et d'un trésorier.

Exercice 9

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12 dont 3 sont rouges, 4 vertes et 5 blanches. On tire successivement et avec remise, trois boules de cette urne.

1. Dénombrer l'ensemble des tirages possibles.
2. Calculer le nombre de tirages distincts dans chacun des cas ci-dessous :

   a. les trois boules tirées sont vertes ;

   b. les trois boules tirées sont rouges ;

   c. les trois boules tirées sont de la même couleur ;

d. les trois boules tirées sont de couleurs distinctes ;

e. la première et la troisième boule tirée sont vertes ;

f. seules la première et la troisième boule tirée sont vertes.

Exercice 10

Dans cet exercice on distinguera deux cas suivant que le tirage est effectué avec ou sans remise.

On tire successivement 4 boules d'une urne qui contient 3 vertes et 7 jaunes.

1. Déterminer le nombre total de tirages distincts.
2. Déterminer le nombre de tirages comportant :

a. 4 boules jaunes ; **b.** 4 boules vertes ; **c.** 3 jaunes et 1 verte dans cet ordre ;

d. 3 jaunes et 1 verte ; **e.** 2 jaunes et deux vertes dans cet ordre ; **f.** 2 jaunes et 2 vertes.

Exercice 11

On tire successivement sans remise 4 boules d'une urne qui contient 3 vertes et 7 jaunes.

1. Déterminer le nombre total de tirages distincts.
2. Déterminer le nombre de tirages comportant :

a. 4 boules jaunes ; **b.** 4 boules vertes ; **c.** 3 jaunes et 1 verte dans cet ordre ;

d. 3 jaunes et 1 verte ; **e.** 2 jaunes et deux vertes dans cette ordre ; **f.** 2 jaunes et 2 vertes ;

g. Au moins deux boules vertes ; **h.** au plus deux boules vertes.

Exercice 12

Une urne contient 3 boules rouges, 4 vertes et 5 blanches. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

1. Dénombrer l'ensemble des tirages possibles.
2. Dénombrer l'ensemble des tirages pour lesquels :

a. Une des boules au moins est blanche.

b. Il y a au plus deux couleurs distinctes dans le tirage.

Exercice 13

A l'oral d'un examen, un candidat doit répondre à 8 questions choisies au hasard sur un total de 10 questions numérotées de 1 à 10. L'examen d'un candidat est caractérisé par les 8 questions auxquelles il a répondu.

1. Combien y a-t-il d'examens possibles pour un candidat ?
2. Combien y a-t-il d'examens possibles s'il est tenu de répondre aux trois premières questions ?
3. Combien y a-t-il d'examens possibles s'il est tenu de répondre à au moins 4 des cinq premières questions ?

Exercice 14

Information : *Un jeu de 32 cartes est constitué de 4 «couleurs» : pique, cœur, carreau, trèfle (voir tableau) contenant chacune 8 « valeurs » : l'as, le roi, la dame, le valet, le 10, le 9, le 8 et le 7.*

pique	*cœur*	*carreau*	*trèfle*
♠	♥	♦	♣

On tire simultanément 5 cartes de ce jeu. Calculer le nombre de tirage distincts dans les cas suivants :

1. les 5 cartes sont quelconques ; **2.** Il y a exactement 2 As parmi les 5 cartes ;

3. il y a au moins 1 As parmi les 5 cartes ; **4.** les 5 cartes sont de la même couleur ;

5. dans les 5 cartes il y a exactement une dame et 2 cœurs.

Exercice 15

On lance 3 dés de couleurs différentes dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse au nombre qui apparait sur la face supérieur de chacun d'eux.

1. Déterminer le nombre de résultats possibles ?
2. Déterminer le nombre de résultats comportant :
   a. Un seul six ;
   b. Au moins un six ;
   c. Au moins le numéro et au moins un six.
3. Déterminer le nombre de résultats tels que la somme des nombres est égal à 13.

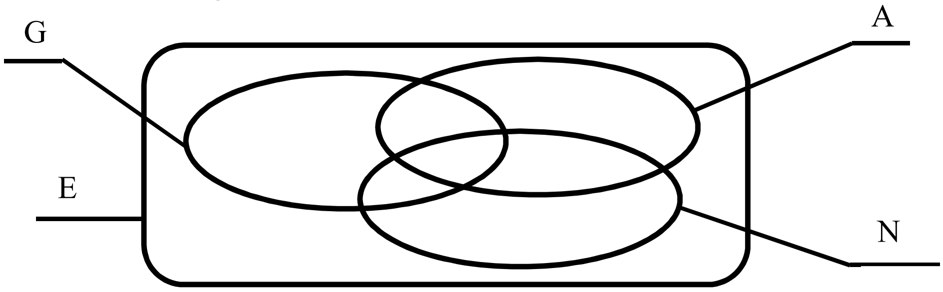
Exercice 16

Un club de sport compte 35 adhérents en natation ; 28 en athlétisme et 29 en gymnastique.

Chaque adhérent pratique au moins un sport. On appelle G ; A et N les ensembles respectifs des adhérents de Gymnastique, Athlétisme et Natation.

11 adhérents font la natation et l'athlétisme, 10 la natation et la gymnastique, 6 font les trois sports à la fois et 17 font seulement la gymnastique.

1. Reproduire et compléter le schéma ci-dessous en mettant dans chaque partie de cette partition de E son cardinal où E désigne l'ensemble des 35 adhérents du club.



2. Pour expliquer à ton jeune frère le schéma que tu viens de compléter dis lui :
   a. Combien d'adhérents font seulement G et A ?
   b. Combien d'adhérents pratiquent un seul sport ?

c. Combien d'adhérents pratiquent au moins deux sports ?

d. Combien d'adhérents y-a-t-il dans le club ?

Exercice 17

On appelle anagramme d'un mot donné tout mot ayant un sens ou non qui s'écrit avec les mêmes lettres. Exemple : RAGE est une anagramme de GARE.

1. Dénombrer les anagrammes du mot CRAYONS
2. Dénombrer les anagrammes du mot CRAYONS :

a. commençant et finissant par une consonne ; **b.** commençant et finissant par une voyelle ;

c. commençant par une voyelle et finissant par une consonne ;

d. commençant par une consonne et finissant par une voyelle.

e. Que remarque-t-on en sommant les résultats trouvés en **a.**, **b.** , **c.** et **d.** ? Expliquer.

3. Dénombrer les anagrammes du mot « dictée » :

a. en tenant compte de l'accent ;

b. en ne tenant pas compte de l'accent sur le e c'est- à-dire en ne différenciant pas é et e.

4. Dénombrer les anagrammes du mot ANAGRAMME.

Exercice 18

Dix-sept chevaux sont au départ d'un grand prix .Combien y a-t-il de tiercés possibles :

1. au total ?
2. dans lesquels les 3 chevaux de tête sont dans l'ordre ?
3. dans l'ordre ou dans le désordre ?
4. dans le désordre ?

Exercices de synthèse

Exercice 19

Soit A et B des parties d'un ensemble Ω .

1. a. Démontrer que $A=(A\cap B) \cup (A\cap \overline{B})$.

   b. En déduire que $\text{Card}(A)=\text{Card}(A\cap B)+\text{Card}(A\cap \overline{B})$.

2. a. Identifier parmi les ensembles $C_A^{A\cap B}$, $C_B^{A\cap B}$ et $A\cap B$; l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B.

   b. Justifier que $A\cup B = (C_A^{A\cap B}) \cup (C_B^{A\cap B}) \cup (A\cap B)$.

   c. Justifier que les ensembles $C_A^{A\cap B}$, $C_B^{A\cap B}$ et $A\cap B$ sont deux à deux disjoints.

   d. En déduire que $\text{Card}(A\cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A\cap B)$.

Exercice 21

1. Dans un championnat de football, chacune des 16 équipes doit rencontrer dans un match aller et dans un match retour toutes les autres équipes. Calculer le nombre total de matchs de ce championnat.
2. Pour réduire le nombre de matchs, les 16 équipes sont réparties en 4 poules de 4 équipes ; le vainqueur de chaque poule participe à une poule finale.

Sachant qu'à l'intérieur de chaque poule chaque équipe rencontre les trois autres dans un match allé et dans un match retour,

Calculer alors le nombre total de matchs.

Exercice 22

Une table ronde comporte cinq places, numérotées de 1 à 5. On veut répartir Aby, Birama, Charles, Daba et Elimane autour de la table.

1. Combien y-a-t-il de dispositions possibles ?
2. Sachant que Daba et Birama ne s'entendent pas du tout, et il ne faut pas les placer côte à côte. Combien y-a-t-il alors de dispositions possibles?

Exercice 23

Dans une pièce, il y a deux tables. La première dispose de 3 chaises, numérotées de 1 à 3, la seconde dispose de 4 chaises, numérotées de 1 à 4. Sept personnes entrent. Combien y-a-t-il de possibilités de les distribuer autour de ces deux tables ?

Exercice 24

Cinq moniteurs accompagnent une classe de 30 filles et 25 garçons à une sortie dans le parc du Djoudj. Les services du parc mettent à leur disposition une pirogue de 12 places pour des excursions devant comprendre dix élèves et deux moniteurs. Calculer :

1. le nombre de remplissages possibles de la pirogue (une personne pour une place) ;
2. le nombre de remplissages possibles ne comportant que des filles de la classe ;
3. le nombre de remplissages possibles comportant exactement 6 garçons de la classe ;
4. le nombre de remplissages possibles pour une excursion au repère des pélicans dont seul l'un des cinq moniteurs connait l'endroit et donc doit nécessairement servir d'accompagnateur ;
5. le nombre de remplissages possibles sachant que deux moniteurs sont inséparables ;
6. le nombre de remplissages possibles sachant que deux moniteurs refusent de se trouver ensemble dans la même excursion et que si l'un s'en va l'autre reste.

Exercice 25

Une boîte contient trois jetons de couleur : un bleu, un jaune et un rouge. Les jetons sont indiscernables au toucher.

1. On tire un premier jeton, on note sa couleur, on le remet dans le sac, puis on tire un second jeton. Chaque jeton bleu rapporte bleu rapporte 2 points, chaque jeton jaune rapporte 1 point et chaque jeton rouge fait perdre 2 points.
   a. Utiliser un tableau à double entrée pour déterminer les gains positifs ou négatifs à chacun des neuf tirages (un gain négatif est une perte)
   b. Quels sont les résultats possibles à l'issue d'une partie ?
   c. Dresser un tableau indiquant le nombre de façons possibles d'obtenir chacun des résultats.
2. On tire un premier jeton, on note sa couleur, puis on tire un second jeton sans remettre le premier dans le sac. Quels sont les résultats possibles dans ce cas ?

Exercice 26

On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

1. si les livres doivent être groupés par matières.
2. si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

Exercice 27

La confédération internationale de football décide de classer par ordre les 3 meilleurs joueurs de l'année 2007, parmi un groupe de 10 joueurs choisis par les journalistes sportifs.

Parmi les 10 joueurs figurent 3 Africains : Drogba, Eto et Essien :

1. Calculer le nombre de classements possibles.
2. Calculer le nombre de classements tels que :
   a. Les 3 joueurs choisis soient tous des Africains.
   b. Drogba soit élu meilleur joueur parmi les 3 joueurs choisis.
   c. Eto figure parmi les 3 joueurs choisis.
   d. Seul le premier des 3 joueurs choisis, est Africain.
   e. Il y a au moins un africain parmi les 3 joueurs choisis.

Exercice 28

Lors de l'ouverture du gouvernement scolaire, la troupe théâtrale du lycée doit présenter une pièce de théâtre. La pièce est jouée par un groupe de 10 acteurs (et actrices) désignés au hasard .La troupe est formée de 14 filles et 11 garçons dont Abdou et Fatou.

1. De combien de façons peut-on choisir le groupe de 10 acteurs pour jouer la pièce ?
2. Combien y a-t-il de groupes comprenant seulement 3 garçons ?
3. Combien y a-t-il de groupes comprenant autant de filles que de garçons ?
4. combien y a-t-il de groupes comprenant au moins 2 filles ?

5. Combien y a-t-il de groupes comprenant Abdou ?

6. Combien y a-t-il de groupes comprenant Abdou et Fatou ?

7. Combien y a-t-il de groupes comprenant Abdou ou Fatou ?

8. Combien y a-t-il de groupes comprenant ni Abdou ni Fatou ?

9. Combien y a-t-il de groupes comprenant Abdou et pas Fatou ?

Exercice 29

1. Le code PIN d'un téléphone portable est un nombre de quatre chiffres choisis parmi 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 et 9.
   a. Quel est le nombre de codes possibles ?
   b. Quel est le nombre de codes formés de quatre chiffres deux à deux distincts ?
2. Le téléphone portable étant éteint, le propriétaire voulant l'allumer sait que les quatre chiffres de ce code sont 1 , 9 , 9 et 5 mais il ignore l'ordre de ces chiffres.
   a. Combien de codes différents peut-il composer avec ces 4 chiffres ?
   b. Si le premier code introduit n'est pas bon, il doit attendre 2 mn avant de pouvoir tenter un second essai ; le délai d'attente entre le second et le troisième essai est de 4 mn et celui entre le $3^{ème}$ et le $4^{ème}$ de 8 mn. (Le délai d'attente double entre deux essais successifs).
   Combien de codes peut-il introduire au maximum en 24 heures.

Exercice 30

Un sac contient n boules noires et b boules blanches indiscernables au toucher.

On tire simultanément p boules du sac avec $p \leq b \leq n$.

1. Dénombrer les tirages comportant : **a.** zéro boule noire , **b.** une boule noire , **c.** 2 boules noires , **d.** 3boules noires , **e.** p boules noires.

2. En déduire que : $C_n^0 C_b^p + C_n^1 C_b^{p-1} + C_n^2 C_b^{p-2} + \ldots + C_n^p C_b^0 = C_{n+b}^p$.

Exercice 31

1. A l'aide de la formule du binôme, démontrer que : $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$ .Donner une interprétation de ce nombre en terme de cardinal.

2. Calculer de même $\sigma_n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n$.

Thème 14: TRANSFORMATIONS

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1
Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est vraie ou fausse.

P1. La composée de deux homothéties de centres distincts est une homothétie.

P2. La composée de deux rotations de même centre est en une rotation.

P3. La composée d'une homothétie et d'une translation de vecteur est une translation.

Exercice 2

Recopier et compléter les énoncés ci-dessous pour que la proposition soit vraie.

1. Une transformation est une application …du plan dans lui-même.
2. La composée de deux transformations est une … .
3. La composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants est … .
4. . La composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est … .
5. La composée de deux rotations de centre O et d'angles α et β est … et d'angle … .
6. La composée de deux translations est une …de vecteur… .
7. La composée d'une homothétie et d'une translation est … .
8. La composée de deux homothéties est ….

Exercices d'application

Exercice 3

ABC est un triangle.

Soit h et h' les homothéties de centre respectifs B et C de rapport respectifs 2 et $-\frac{1}{3}$ ·

Démontrer que h'$\circ$ h est une homothétie et préciser son rapport.

Exercice 4

ABC est un triangle

Soit h et h' les homothéties de rapports respectifs $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{3}$ ·

Démontrer que h'$\circ$h est une translation.

Exercice 5

Le plan est muni du repère (O ; $\vec{i}, \vec{j}$).Soit h l'homothétie de centre Ω (–2 ; 1) et de rapport $-\frac{3}{2}$ ·

1. Déterminer l'expression analytique de h dans le repère (O ; $\vec{i}, \vec{j}$).
2. En déduire les coordonnées du point A dont l'image par h est le point A' de couple de coordonnées (– 4, 7).

Exercice 6

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O. Soient les rotations

$r_1(B, \frac{\pi}{2})$; $r_2(A, \frac{\pi}{2})$; $r_3(O, -\frac{\pi}{2})$.

1. Déterminer l'image de C par $r_2 \circ r_1$. En déduire la nature et les éléments géométriques caractéristiques de $r_2 \circ r_1$.
2. Déterminer l'image de C par $r_3 \circ r_1$. En déduire la nature et l'élément géométrique caractéristique de $r_3 \circ r_1$ ·
3. Déterminer la nature et l'élément caractéristique de $r_3 \circ r_1$ ·

Exercice 7

Le plan est muni du repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère le vecteur $\vec{u}$ (1 ; 2) et la droite (D) d'équation 2x-3y+4 = 0.

1. Quelle est l'expression analytique de la translation de vecteur t de vecteur $\vec{u}$.
2. Soit (D') l'image de (D) par t. Déterminer une équation cartésienne de (D').

Exercice 8

On considère un carré direct ABCD de centre O. I et J, sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AD], E est le symétrique de A par rapport à C.

Déterminer la nature et les éléments géométriques caractéristiques $S_{(DB)} \circ S_{(IJ)}$ et $S_{(CE)} \circ S_{(CB)}$.

Exercices de synthèse

Exercice 9

Soit A et B deux points distincts.

1. Déterminer et construire la droite (Δ) telle que : $r(A, -\frac{2\pi}{3}) = S_{(\Delta)} \circ S_{(AB)}$.
2. Déterminer et construire la droite (Δ') telle que : $r'(B, -\frac{2\pi}{3}) = S_{(AB)} \circ S_{(\Delta')}$.
3. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r'∘r.

Exercice 10

Le plan est rapporté à un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Soit f , g et h les transformations définies respectivement par les expressions analytiques ci-dessous :

1. $\begin{cases} x' = -x + 1 \\ y' = -y + 7 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} x' = x - 5 \\ y' = y + 2 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} x' = 3x - 1 \\ y' = 3y + 4 \end{cases}$.

Reconnaitre chacune de ces transformations et donner ses éléments caractéristiques.

Exercice 11

Soit trois points non alignés A, B, C.

1. Construire le point D tels que : $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{7}\overrightarrow{DC}$.
2. Soit I le centre de l'homothétie h telle que h(A) = D et h(B) = C.
   Construire I et préciser le rapport de l'homothétie h.
3. Soit O le point d'intersection des droites (AC) et (BD) et h' l'homothétie de centre O telle que h'(A) = C.
   Déterminer l'image de B par h' et préciser le rapport de h'.
4. Soit E le milieu segment [AB] et F milieu du segment [DC].
   Monter que les points I ; O ; E et F sont alignés.

Exercice 12

Le plan est orienté. On considère un losange direct ABCD. Soit I le point tel que DC= DI et

$(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DI}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, J le symétrique de I par rapport à (BD) et O le milieu de [AJ].

On désigne par r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ ·

1. Faire la figure.
2. Démontrer que JAD est un triangle rectangle en D.
3. Déterminer les images de A et D par r .
4. Justifier que r(B) = I.
5. a. En déduire la nature du triangle IBO.

   b. Démontrer que (BD) $\perp$ (IJ) et BD = IJ.

Exercice 13

Dans le plan orienté, on donne un cercle (C) de centre O, une droite (D) extérieur à (C) et un point A de (D). à tout point M de (C), on associe le point N tel que le triangle AMN soit équilatéral direct.

1. Quel est le lieu géométrique (E_1) de N lorsque M décrit (C) ?
2. Quel est le lieu géométrique (E_2) de P, projeté orthogonal de M sur (AN) ? Construire (E_2).

Exercice 14

Dans le plan orienté, on considère un triangle isocèle de sommet principal B du triangle ABC.
On désigne r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$ ·

1. Construire le point D tel que r_B(D)=A et montrer que les points A, C et D sont alignés.
2. a. Justifier que $r_A \circ r_B$ est une rotation.
   b. Déterminer l'image du segment [BD] par $r_A \circ r_B$.
   c. En déduire que le centre de $r_A \circ r_B$ est l'orthocentre de H du triangle ABC.

Exercice 15

On considère un triangle ABC. Soit h l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Justifier que $t \circ h$ est une homothétie et préciser son rapport.

2. Construire l'image de A par $t \circ h$ et en déduire une détermination du centre de cette homothétie.

Thème 15: GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Recopier et compléter les propriétés ci-dessous pour avoir une proposition vraie :

1. Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque, un point de l'espace étant choisi, les … à ces droites passant par ce point sont … .
2. Si deux droites orthogonales, toute droite … à l'une est … à l'autre.
3. Si deux droites sont parallèles, toute droite … à l'une est … à l'autre.
4. Une droite (D) et un plan (P) sont orthogonaux lorsque la droite (D) est … à deux droites … du plan (P).
5. Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est … à toute droite de ce plan.
6. Si deux droites (D) et (D') sont parallèles, tout plan … à (D) est … à (D').
7. Si deux plans (P) et (P') sont parallèles , toute droite … à (P) est … à (P').
8. Si deux droites (D) et (D') sont orthogonales à un même plan (P), alors elles sont … .
9. Si deux plans (P) et (P') sont orthogonaux à une même droite (D),), alors ils sont … .
10. Un plan médiateur du segment [AB] est l'ensemble des points de l'espace…des points A et B.

Exercices d'application

Exercice 2

On considère un triangle équilatéral ABC d'orthocentre H.

Soit un point S de la droite (d) passant par H et perpendiculaire au plan (ABC) (S distinct de H).

Montrer que le plan (SHC) est le plan médiateur du segment [AB].

Exercice 3

On considère un cercle C d'axe D et une corde [MN] de C telle que [MN] ne soit pas un diamètre.

Soient I le milieu du segment [MN] et Q le plan déterminé par le point I et la droite D. Montrer que le plan Q est le plan médiateur de [MN].

Exercice 4

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans chacun des cas ci-dessous :

1. $\vec{u} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$ et $\vec{v} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$;

2. $\vec{u} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$ et $\vec{v} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$;

3. $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$;

4. $\vec{u} = \overrightarrow{3i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$;

5. $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$;

6. $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{3i} - 2\vec{j} - \vec{k}$;

7. $\vec{u} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$;

8. $\vec{u} = \overrightarrow{2i} - 3\vec{k}$ et $\vec{v} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

Exercice 5

En utilisant le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, donner une équation du plan passant par A et de base $(\vec{u},\vec{v})$ dans les deux cas ci-dessous :

a. A $(2 , -1 , 3)$ et $\vec{u}\,(1 , 1 , 1)$ et $\vec{v}\,(-1 , 2 , 1)$; **b.** A $(3 , 0 , 2)$ et $\vec{u}\,(1 ,-1 , 0)$ et $\vec{v}\,(3 , -2 , 1)$.

Exercice 6

On donne les points A $(-1 , 1 , 2)$, B$(1 , 2, 0)$, C$(0 , 4 , 6)$.

1. En utilisant le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, calculer cos $\widehat{BAC}$.

2. En utilisant le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, calculer sin$\widehat{BAC}$.

3. En déduire une mesure de $\widehat{BAC}$.

Exercice 7

Soit A$(2 , 4 ,-5)$, B$(1 , 0 , 4)$, C$(0 , 3 , 1)$.

1. Vérifier que ces points ne sont pas alignés.

2. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 8

Soit A $(1 , -2 , 3)$, B $(0 , 3 ,-1)$, C$(1 , 1 , 1)$.

1. Calculer les coordonnées :

   a. du point A' tel que ABA'C soit un parallélogramme.

   b. du point B' tel que BCB'A soit un parallélogramme.

2. Calculer l'aire de chacun de ces parallélogrammes.

Exercice 9

Soit A $(1 , 4 , 3)$, B $(2 , 11 , 4)$, C $(-3 ,-5 , 4)$.

1. Montrer que ces points ne sont pas alignés.

2. Donner une équation du plan qui les contient.

3. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 10

La droite (AB) est perpendiculaire au plan (P) passant par A.

1. Calculer la distance du point M au plan (P), dans les cas ci-dessous :
   a. A $(2 ; 5 ; 7)$, B $(-7 ; 7 ; 1)$, M $(8 ; 7 ; 7)$;
   b. A $(2 ; 5 ; 7)$, B $(-7 ; 7 ; 1)$, M $(4 ; 2 ; 3)$;
   c. A $(8 ; 4 ; 1)$, B $(6 ; 2 ; 0)$, M $(-4 ; 3 ; -2)$.
2. Dans chacun des cas précédents, calculer les coordonnées de la projection orthogonale M' de M sur (P) et celles du symétrique N de M relativement à (P).

Exercice 11

On considère le tétraèdre ABCD de sommets A $(3 , -1 , -2)$, B $(-2 , 0 , 3)$, C $(1 , 1 , 2)$ et D $(0, 3, 3)$. Trouver les coordonnées du point M équidistant des points A et D et appartenant à la normale au plan (ABC) passant par le point C.

Exercices de synthèse

Exercice 12

Soit un losange ABCD d'un plan (P). On appelle (Q) le plan contenant la droite (BD) et perpendiculaire à (P) et (R) le plan contenant la droite (AC) et perpendiculaire à (P).

1. Montrer que (Q) et (R) sont les plans médiateurs respectifs des segments [BD] et [AC].
2. Montrer que les plans (Q) et (R) sont sécants suivants une droite $(\triangle)$ et que $(\triangle) \perp (P)$.
3. Soit un point M de $(\triangle)$. Montrer que si $(MA = MB)$ alors ABCD est un carré.

Exercice 13

On considère un tétraèdre régulier ABCD d'arête a.

1. Soit le point I milieu du segment [CD].Montrer que (AIB) est le plan médiateur [CD].
2. Soit A' le pied de la hauteur du triangle AIB issue du sommet A.
   a. Montrer que la droite (AA') est perpendiculaire au plan (BCD).
   b. Quel est alors l'axe du cercle circonscrit au triangle BCD ?
3. Calculer en fonction de a la distance AA'.
4. Soit le point K milieu du segment [AA'], calculer en fonction de a les distances BK et KI. En déduire que le triangle BKI est rectangle.
5. Soient les points E et F milieux respectifs des segments [BC] et [BD]. Montrer que la droite (EF) est l'axe du cercle circonscrit au triangle BKI.

Exercice 14

A. Soit [KL] un segment de l'espace ; on note I son milieu.
On appelle plan médiateur de [KL] le plan perpendiculaire en I à la droite (KL).
Démontrer que le plan médiateur de [KL] est l'ensemble des points de l'espace équidistants de K et L.

B. Ici l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points A(4 ; 0 ; −3), B(2 ; 2 ; 2), C(3 ; −3 ; −1), D(0 ; 0 ; −3).
1. Démontrer que le plan médiateur de [AB] a pour équation $4x - 4y - 10z - 13 = 0$.
2. On admet pour la suite que les plans médiateurs de [BC] et [CD] ont respectivement pour équations : $2x - 10y - 6z - 7 = 0$ et $3x - 3y + 2z - 5 = 0$.
Démontrer, en résolvant un système d'équations linéaires, que ces trois plans ont un unique point commun E dont on donnera les coordonnées.
3. En utilisant la partie A montrer que les points A, B, C et D sont sur une sphère de centre E.
Quel est le rayon de cette sphère ?

Exercice 15

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A(\frac{2}{3}, -3, 2)$ et $B(-\frac{4}{3}, 0, -4)$. On note I le milieu du segment [AB] et (S) la sphère de diamètre [AB].

1. Soit E le barycentre des points pondérés (A, 2) et (B,1).
   a. Calculer les coordonnées de E.
   b. Montrer que l'ensemble (P) des points M de l'espace tels que $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 3\|\overrightarrow{MO}\|$ est le plan médiateur du segment [OE].
   c. Montrer qu'une équation du plan (P) est $y = -1$.
2. a. Calculer le rayon de la sphère (S) et la distance du centre I de la sphère au plan (P). En déduire que l'intersection (C) du plan (P) et de la sphère (S) n'est pas vide.
   b. Montrer qu'une équation de (C) dans le plan (P) est $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (z + 1)^2 = 12$.
   En déduire que (C) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. Soit D le point de coordonnées $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 4\sqrt{3} - 1)$.
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D).
   b. En déduire que la droite (D) est sécante au cercle (C) en un point noté F dont on donnera les coordonnées.